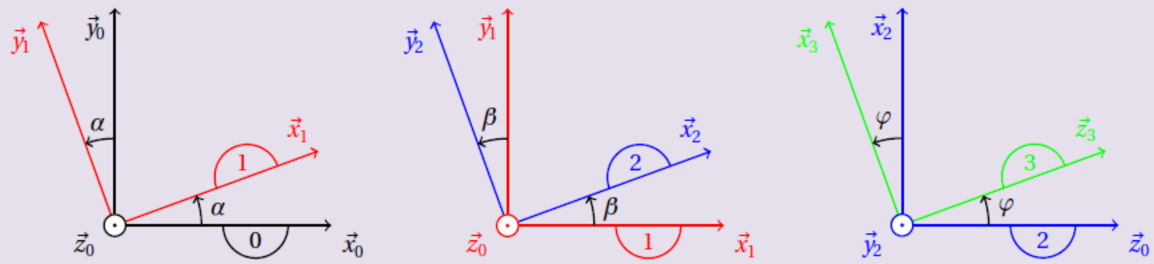
CORRIGE

Question 1

Construire les figures planes associées au schéma cinématique.

Correction



Question 2

Calculer $\overrightarrow{\Omega(1/0)}$, $\overrightarrow{\Omega(2/1)}$ *et* $\overrightarrow{\Omega(3/2)}$.

Correction

$$\overrightarrow{\Omega}_{1/0} = \dot{\alpha}\vec{z}_0$$
$$\overrightarrow{\Omega}_{2/1} = \dot{\beta}\vec{z}_0$$
$$\overrightarrow{\Omega}_{3/2} = \dot{\varphi}\vec{y}_2$$

Question 3

Calculer $\overrightarrow{\Omega(2/0)}$ *et* $\overrightarrow{\Omega(3/0)}$.

Correction

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Omega}_{2/0} &= \overrightarrow{\Omega}_{2/1} + \overrightarrow{\Omega}_{1/0}\\ &= (\dot{\alpha}+\dot{\beta})\vec{z}_0\\ \overrightarrow{\Omega}_{3/0} &= \overrightarrow{\Omega}_{3/2} + \overrightarrow{\Omega}_{2/0}\\ &= (\dot{\alpha}+\dot{\beta})\vec{z}_0 + \dot{\varphi}\vec{y}_2\end{aligned}$$

Avec

Question 5

Calculer $\overrightarrow{V(O_2 \in 2/0)}$, $\overrightarrow{V(O_3 \in 3/0)}$ *et* $\overrightarrow{V(P \in 3/0)}$.

Correction

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V}_{O_2\in 2/0} &= \overrightarrow{V}_{O_2\in 2/1} + \overrightarrow{V}_{O_2\in 1/0}\\
&= \overrightarrow{V}_{O_1\in 1/0} + \overrightarrow{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{O_1O_2}\\
&= \dot{\alpha}\vec{z}_0 \wedge (-l_1\vec{y}_1)\\
\boxed{\overrightarrow{V}_{O_2\in 2/0} = l_1\dot{\alpha}\vec{x}_1}\\
\overrightarrow{V}_{O_3\in 3/0} &= \overrightarrow{V}_{O_3\in 3/2} + \overrightarrow{V}_{O_3\in 2/0}\\
&= \overrightarrow{V}_{O_2\in 2/0} + \overrightarrow{\Omega}_{2/0} \wedge \overrightarrow{O_2O_3}\\
&= l_1\dot{\alpha}\vec{x}_1 + (\dot{\alpha}+\dot{\beta})\vec{z}_0 \wedge (-l_2\vec{y}_2)\\
\boxed{\overrightarrow{V}_{O_3\in 3/0} = l_1\dot{\alpha}\vec{x}_1 + l_2(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\vec{x}_2}\\
\overrightarrow{V}_{P\in 3/0} &= \overrightarrow{V}_{O_3\in 3/0} + \overrightarrow{\Omega}_{3/0} \wedge \overrightarrow{O_3P}\\
&= l_1\dot{\alpha}\vec{x}_1 + l_2(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\vec{x}_2 + \left((\dot{\alpha}+\dot{\beta})\vec{z}_0 + \dot{\varphi}\,\vec{y}_2\right) \wedge (-R\vec{z}_3)\\
\boxed{\overrightarrow{V}_{P\in 3/0} = l_1\dot{\alpha}\vec{x}_1 + l_2(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\vec{x}_2 - R\sin\varphi(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\vec{y}_2 - R\dot{\varphi}\,\vec{x}_3}
\end{aligned}$$

Avec :

Correction

$$\begin{aligned}
\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_3 &= \sin\varphi\,\vec{y}_2\\
\vec{x}_3 \wedge \vec{x}_2 &= -\sin\varphi\,\vec{y}_2\\
\vec{x}_3 \wedge \vec{z}_2 &= -\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\vec{y}_2\\
&= -\cos\varphi\,\vec{y}_2\\
\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_1 &= \vec{0}\\
\vec{x}_2 \wedge \vec{x}_0 &= \left(\cos\beta\,\vec{x}_1 + \sin\beta\,\vec{y}_1\right) \wedge \vec{x}_0\\
&= -\cos\beta\,\sin\alpha\vec{z}_0 - \sin\beta\,\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\vec{z}_0\\
&= (-\cos\beta\,\sin\alpha - \sin\beta\,\cos\alpha)\vec{z}_0\\
&= -\sin(\beta+\alpha)\vec{z}_0\\
\vec{x}_3 \wedge \vec{z}_0 &= -\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\vec{y}_2\\
&= -\cos\varphi\,\vec{y}_2
\end{aligned}$$

Question 6

Déterminer les valeurs des paramètres $\dot\alpha$, $\dot\beta$ et $\dot\varphi$ puis l'expression analytique des positions angulaires $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ et $\varphi(t)$ dans l'intervalle de temps $[17;27]$ secondes en sachant qu'à l'instant $t = 17\ s$, on a $\alpha = 10,5\ rad$, $\beta = 3,76\ rad$ et $\varphi = -10,676\ rad$.

Correction

Dans l'intervalle de temps compris entre 17 et 27 secondes, les vitesses angulaires sont constantes.

$$\begin{cases} \dot\alpha = 0,84 \text{ rad/s} \\ \dot\beta = 0,94 \text{ rad/s} \\ \dot\varphi = -0,628 \text{ rad/s} \end{cases}$$

Ainsi, par intégration :

$$\alpha(t) - \alpha(17) = \int_{17}^{t} \dot\alpha\, d\tau$$

Question 7

Déterminer les valeurs numériques à l'instant $t_1 = 19,8\ s$ de α, β et φ.

Correction

Pour $t = 19,8$ s,

$$\begin{cases} \alpha = 0,84 \times (19,8-17) + 10,5 = \boxed{12,85 \text{ rad}} \\ \beta = 0,94 \times (19,8-17) + 3,76 = \boxed{6,39 \text{ rad}} \\ \varphi = -0,628 \times (19,8-17) - 10,676 = \boxed{12,43 \text{ rad}} \end{cases}$$

Question 8

On pose $\overrightarrow{V(P \in 3/0)} = V_{x2}\overrightarrow{x_2} + V_{y2}\overrightarrow{y_2} + V_{z2}\overrightarrow{z_2}$. Déterminer les expressions littérales de V_{x2}, V_{x2}, V_{z2} puis les valeurs numériques de à $t_1 = 19,8\ s$. (On donne : $l_1 = 3,9\ m$, $l_2 = 2,87\ m$, $R = 2,61\ m$.)

Correction

Il s'agit de projeter le vecteur $\overrightarrow{V}_{P\in 3/0}$ dans la base $(\vec x_2, \vec y_2, \vec z_0)$. En effet, le vecteur $\vec z_2$ est identique au vecteur $\vec z_0$.

$$\overrightarrow{V}_{P\in 3/0} = V_{x2}\vec x_2 + V_{y2}\vec y_2 + V_{z2}\vec z_0$$

$$V_{x2} = \overrightarrow{V}_{P\in 3/0} \cdot \vec x_2$$

$$= \left(l_1\dot\alpha\vec x_1 + l_2(\dot\alpha+\dot\beta)\vec x_2 - R\sin\varphi(\dot\alpha+\dot\beta)\vec y_2 - R\dot\varphi\,\vec x_3\right)\cdot \vec x_2$$

$$V_{x2} = l_1\dot\alpha\cos\beta + l_2(\dot\alpha+\dot\beta) - R\dot\varphi\cos\varphi$$

$$V_{y2} = \overrightarrow{V}_{P\in 3/0} \cdot \vec y_2$$

$$= \left(l_1\dot\alpha\vec x_1 + l_2(\dot\alpha+\dot\beta)\vec x_2 - R\sin\varphi(\dot\alpha+\dot\beta)\vec y_2 - R\dot\varphi\,\vec x_3\right)\cdot \vec y_2$$

$$V_{y2} = -l_1\dot\alpha\sin\beta - R\sin\varphi(\dot\alpha+\dot\beta)$$

$$V_{z2} = \overrightarrow{V}_{P\in 3/0} \cdot \vec y_2$$

$$= \left(l_1\dot\alpha\vec x_1 + l_2(\dot\alpha+\dot\beta)\vec x_2 - R\sin\varphi(\dot\alpha+\dot\beta)\vec y_2 - R\dot\varphi\,\vec x_3\right)\cdot \vec z_0$$

$$V_{z2} = R\dot\varphi\sin\varphi$$

Valeurs numériques à $t = 19,8$ s :

$$V_{x2} = 3,9 \times 0,84 \times \cos(6,39) + 2,87 \times (0,84+0,94) + 2,61 \times 0,628 \times \cos(12,43)$$

$$= \boxed{9,99 \text{ m/s}}$$

$$V_{y2} = -3,9 \times 0,84 \times \sin(6,39) - 2,61 \times \sin(12,43) \times (0,84+0,94)$$

$$= \boxed{-0,28 \text{ m/s}}$$

$$V_{z2} = -2,61 \times 0,628 \times \sin(12,43)$$

$$= \boxed{-0,22 \text{ m/s}}$$

Correction

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\Gamma}_{P\in 3/0} &= \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}_{P\in 3/0}}{\mathrm{d}t}\right)_0 \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(l_1\dot{\alpha}\vec{x}_1 + l_2(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\vec{x}_2 - R\sin\varphi(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\vec{y}_2 - R\dot{\varphi}\,\vec{x}_3\right)_0 \\
&= l_1\ddot{\alpha}\vec{x}_1 + l_1\dot{\alpha}\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}\vec{x}_1}{\mathrm{d}t}\right)_0}_{\dot{\alpha}\vec{y}_1} + l_2(\ddot{\alpha}+\ddot{\beta})\vec{x}_2 + l_2(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}\vec{x}_2}{\mathrm{d}t}\right)_0}_{(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\vec{y}_2} - R\dot{\varphi}\cos\varphi(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\vec{y}_2 \\
&\quad - R\sin\varphi(\ddot{\alpha}+\ddot{\beta})\vec{y}_2 - R\sin\varphi(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}\vec{y}_2}{\mathrm{d}t}\right)_0}_{-(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\vec{x}_2} - R\ddot{\varphi}\,\vec{x}_3 - R\dot{\varphi}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{x}_3}{\mathrm{d}t}\right)_0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}\vec{x}_3}{\mathrm{d}t}\right)_0 &= \left(\frac{\mathrm{d}\vec{x}_3}{\mathrm{d}t}\right)_3 + \overrightarrow{\Omega}_{3/0}\wedge\vec{x}_3 \\
&= \left((\dot{\alpha}+\dot{\beta})\vec{z}_0 + \dot{\varphi}\,\vec{y}_2\right)\wedge\vec{x}_3 \\
&= (\dot{\alpha}+\dot{\beta})\cos\varphi\,\vec{y}_2 - \dot{\varphi}\,\vec{z}_3
\end{aligned}
$$

D'où :

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\Gamma}_{P\in 3/0} &= l_1\ddot{\alpha}\vec{x}_1 + l_1\dot{\alpha}^2\vec{y}_1 + l_2(\ddot{\alpha}+\ddot{\beta})\vec{x}_2 + l_2(\dot{\alpha}+\dot{\beta})^2\vec{y}_2 - 2R\dot{\varphi}\cos\varphi(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\vec{y}_2 \\
&\quad - R\sin\varphi(\ddot{\alpha}+\ddot{\beta})\vec{y}_2 + R\sin\varphi(\dot{\alpha}+\dot{\beta})^2\vec{x}_2 - R\ddot{\varphi}\,\vec{x}_3 + R\dot{\varphi}^2\vec{z}_3
\end{aligned}
$$