TD – Méthode d'Euler, équations différentielles, système d'ordre 1

Note: **Les questions des exercices ne constituent que la trame principale de ce que vous devez faire pour vous guider, rien n'interdit bien sûr que vous alliez plus loin, que vous testiez d'autres choses, bref que vous expérimentiez…**

PROBLEME 1: LE PENDULE SIMPLE NON LINEAIRE

On considère un pendule simple de masse m, de longueur ℓ qui va osciller d'arrière en avant à cause du champ de gravité de la Terre $\vec{g}$. La ***seconde loi Newton***, ***le théorème du moment cinétique*** ou ***le théorème de l'énergie mécanique*** donne l'équation différentielle suivante qui gouverne l'évolution de l'angle θ par rapport à la verticale (il faudra savoir établir cette équation par les trois méthodes !):

$$\boxed{\ddot{\theta}(t) + \alpha \sin\theta(t) = 0}$$

où $\alpha \equiv g/\ell$. La fonction inconnue à déterminer $\theta(t)$ nous donne accès à la position de la masse, à sa vitesse, à son accélération et à la tension de la corde.
L'objectif de ce TD est de résoudre numériquement, par la méthode d'Euler, cette équation quand $\sin\theta = \sin\theta$!!, nous savons bien (j'espère) résoudre analytiquement cette équation quand $\theta << 1$, on retrouve alors l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique.
Nous allons transformer cette équation différentielle d'ordre 2 en deux équations différentielles d'ordre 1 afin de pouvoir utiliser simplement ***la méthode d'Euler*** (cf. le cours d'informatique). En posant $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$ la vitesse angulaire du pendule, on obtient le système de deux fonctions inconnues suivant :

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\theta}(t) &= \omega(t) \\ \dot{\omega}(t) &= -\alpha \sin\theta(t) \end{aligned}}$$

Pour résoudre ce système nous devons connaître les deux conditions initiales suivantes : $\theta(0) = \theta_0$ et $\omega(0) = \omega_0$. Nous souhaitons calculer la solution pour $t = 0$ à $t = T$ avec $T > 0$. Soit $n \geq 1$ un entier, on définit l'intervalle (le pas de calcul) par $\Delta t \equiv T/n$. On note (θ_k, ω_k) les solutions approchées correspondant aux solutions exactes $(\theta(t_k), \omega(t_k))$ pour $k = 0, 1, \ldots\ n$. La méthode d'Euler qui consiste à remplacer la dérivée par un taux d'accroissement fini donne :

$$\frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{\Delta t} = \omega_k \text{ et } \frac{\omega_{k+1} - \omega_k}{\Delta t} = -\alpha \sin(\theta_k)$$

On peut réécrire les équations ci-dessus de façon plus commode pour l'écriture du code :

$$\boxed{\begin{gathered} \underline{\text{Méthode d'Euler}} \\ \theta_{k+1} = \theta_k + \Delta t \times \omega_k \\ \omega_{k+1} = \omega_k - \alpha \times \Delta t \times \sin(\theta_k) \end{gathered}}$$

Votre travail consiste à taper un script nommé par exemple `pendule-simple.py` qui permette de déterminer pour chaque instant (θ_k,ω_k). Pour cela votre code devra contenir une fonction `pendule(T, n, theta0, omega0, alpha)` qui contient les paramètres d'entrée (T, n, θ_0, ω_0, α) et qui retourne les variables de type `array` de dimension n : `theta`, `omega` et `t` correspondant respectivement à θ_k, ω_k et t. Vous tracerez ***les courbes*** $\theta(t)$ et $\omega(t)$ ainsi que le ***portrait de phase*** en utilisant la fonction `plot`. Vous pouvez tester votre programme avec par exemple les paramètres suivants : $\theta_0=\pi/6$, $\omega_0=0$, $\alpha=5$, $T=10$ et $n=1000$.

Vous êtes bien sûr ***invités à modifier ces paramètres*** pour ***expérimente***r. En particulier il sera intéressant de superposer les courbes pour deux cas : un angle faible et un angle plus important. En effet pour des oscillations à angles faibles, votre résolution numérique approchée doit se rapprocher de la solution analytique exacte de l'oscillateur harmonique.
Observez ce qu'il se passe quand le pendule oscille avec de grands angles et quand il va faire des tours entiers (si les conditions initiales le permettent).

PROBLEME 2: MODELE DE PROPAGATION DE LA GRIPPE

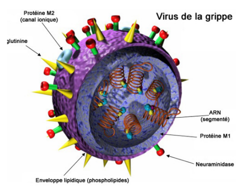
Les modèles mathématiques sont très utilisés pour comprendre la propagation des maladies infectieuses. Nous allons considérer le cas simple d'une population constante constituée de deux groupes : la population (S) ***susceptible d'être contaminée*** et la population ***infectée*** (I) qui porte la maladie et qui est capable de la transmettre.
Un modèle biologique donne le système d'équations différentielles qui gouverne ces populations :

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{S}(t)&=-r\,S(t)I(t)\\ \dot{I}(t)&=r\,S(t)I(t)-a\,I(t)\end{aligned}}$$

où r et a sont des paramètres constants liés à l'épidémie. Pour résoudre ce système nous devons connaître les deux conditions initiales suivantes : $S(0)=S_0$ et $I(0)=I_0$.

Nous souhaitons calculer la solution pour $t=0$ à $t=T$ avec $T>0$. Soit $n\geq 1$ un entier, on définit l'intervalle (le pas de calcul) par $\Delta t\equiv T/n$.

On note (I_k,S_k) les solutions approchées correspondant aux solutions exactes $(I(t_k),S(t_k))$ pour $k=0,\ 1,\ ...\ n$. La méthode d'Euler qui consiste à remplacer la dérivée par un taux d'accroissement fini donne (montrez-le) :



$$\boxed{\begin{aligned}&\underline{\text{Méthode d'Euler}}\\ S_{k+1}&=S_k-\Delta t\times r\times S_k\times I_k\\ I_{k+1}&=I_k+\Delta t\times\left(r\times S_k\times I_k-a\times I_k\right)\end{aligned}}$$

En suivant la même démarche que pour le problème 1, tapez un script nommé par exemple `epidemie.py` qui permette de déterminer pour chaque instant (S_k,I_k).

Vous appliquerez votre code au cas concret suivant. En 1978, une épidémie de grippe a touché une école britannique de 763 garçons. L'épidémie a débuté le 21 janvier et s'est terminée le 4 février. Vous prendrez donc $T=14$, $S_0=762$, $I_0=1$, $r=2{,}18\times10^{-3}$, $a=0{,}44$ et $n=1000$ (données par Murray *et al*, British Medical Journal, 4 mars 1978).

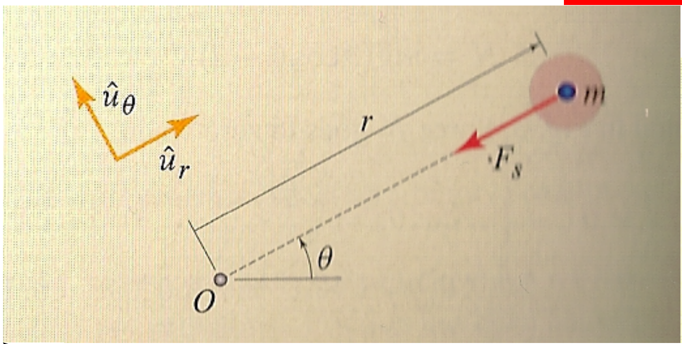
Tracez ***les courbes*** $S(t)$ et $I(t)$ ainsi que le ***portrait de phase.*** Analysez et concluez. Vous pouvez essayer de voir ce qu'il se passe si vous modifiez les paramètres r et a.

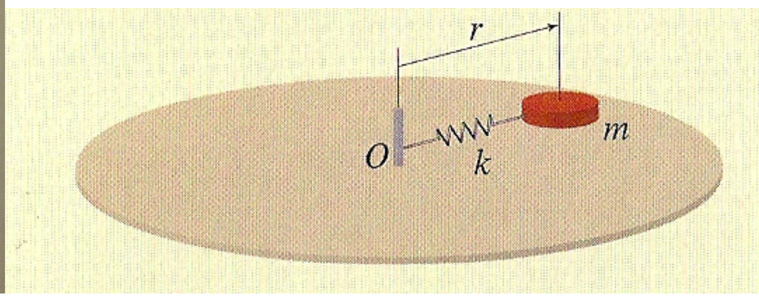
PROBLEME 3: MASSE ATTACHÉE A UN RESSORT ET LIBRE DE TOURNER

On considère une masse m attachée à un ressort. L'autre extrémité du ressort est liée à une tige libre de tourner. La masse est libre de se mouvoir sans frottement sur le plan horizontal. Le ressort a une constante de raideur k et une longueur à vide ℓ_0.

Montrez, par application de la seconde loi de Newton, dans le système de coordonnées polaires, que la masse est régie par le système d'équations différentielles suivant :

$$\boxed{\begin{gathered} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{k}{m}\left(r - \ell_0\right) = 0 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \end{gathered}}$$





Montrez que ce système de 2 équations différentielles d'ordre 2 peut se mettre sous la forme d'un système de 4 équations différentielles d'ordre 1 suivant :

$$\boxed{\begin{gathered} \dot{r}(t) = v(t) \\ \dot{\theta}(t) = \omega(t) \\ \dot{v}(t) = r\omega^2(t) - (k/m)(r - \ell_0) \\ \dot{\omega}(t) = -\frac{2}{r(t)} v(t)\omega(t) \end{gathered}}$$

En remplaçant les dérivées par un taux d'accroissement fini, la méthode d'Euler donne :

$$\boxed{\begin{gathered} \underline{\text{Méthode d'Euler}} \\ r_{k+1} = r_k + \Delta t \times v_k \\ \theta_{k+1} = \theta_k + \Delta t \times \omega_k \\ v_{k+1} = v_k + \Delta t \times \left[r_k \times \omega_k^2 - (k/m) \times (r_k - \ell_0)\right] \\ \omega_{k+1} = \omega_k - \Delta t \times \left[(2/r_k) \times v_k \times \omega_k\right] \end{gathered}}$$

On part des conditions initiales suivantes :

$$r(0) = 0{,}35 \text{ m},\ \theta(0) = 0 \text{ rad},\ \dot{r}(0) = 0 \text{ m.s}^{-1},\ \dot{\theta}(0) = 0{,}5 \text{ rad.s}^{-1} \text{ et } \ell_0 = 0{,}25 \text{ m}.$$

En procédant comme pour les problèmes précédents, écrire un code qui permet de tracez la trajectoire de la masse pour les quatre conditions suivantes : $k/m = 5\,;20\,;100\,;500$ s^{-2}
Chaque `plot` sera tracé pour $0 \le t \le 10$ s.

Note : Pour tracer x et y, il suffit de noter que $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

Attention : Δt doit être très petit ici pour que la méthode d'Euler puisse donner des résultats (trajectoires) corrects.