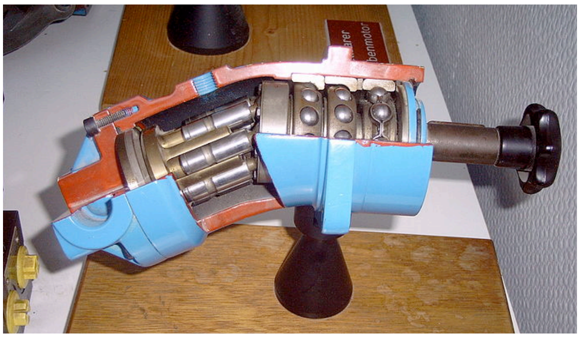
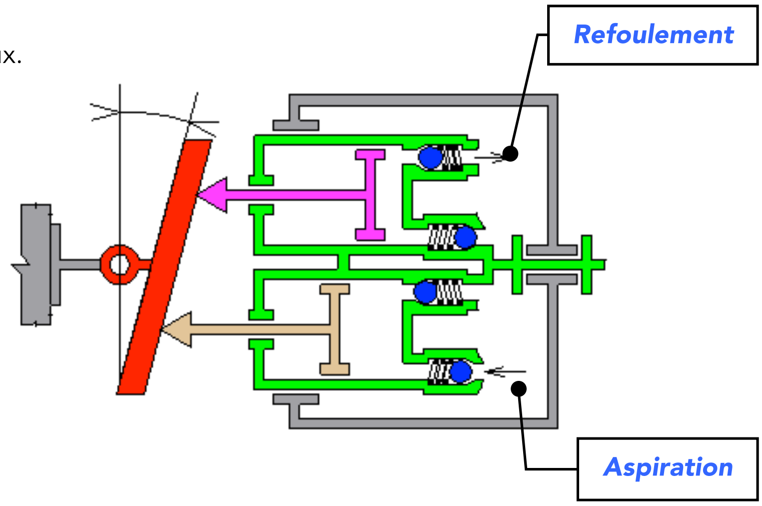
TD : Programmation – analyse numérique
Pompe à pistons axiaux – régularité de débit

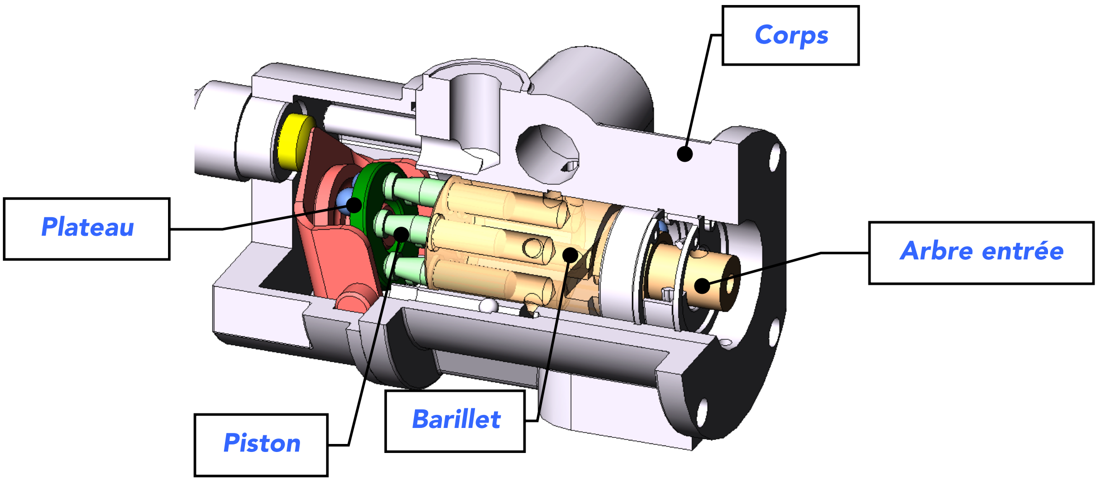
1. Mise en situation

L'objet d'étude est une pompe hydraulique à pistons axiaux.





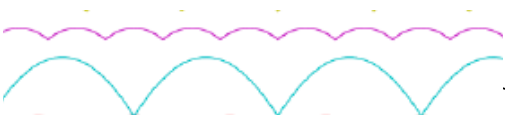
Une pompe est un dispositif permettant d'aspirer et de refouler un fluide. Elle fournit donc un débit $m^3.s^{-1}$. Un arbre d'entrée est animé d'un mouvement de rotation continu et entraine en rotation le plateau incliné. Celui-ci déplace en translation les pistons dans le barillet qui ***créent alternativement l'aspiration et le refoulement***.



Une pompe est caractérisée par n : ***nombre de pistons***, décalés de $\frac{2\pi}{n}$.

Problématique : il est couramment admis qu'il faut un nombre impair de pistons pour une pompe à pistons axiaux, afin d'avoir un coefficient d'irrégularité de débit convenable. On se propose dans cette étude de discuter de cette affirmation.

Note : la régularité est caractérisée par le fait d'avoir le moins possible de variation de débit en sortie (amplitude mini).



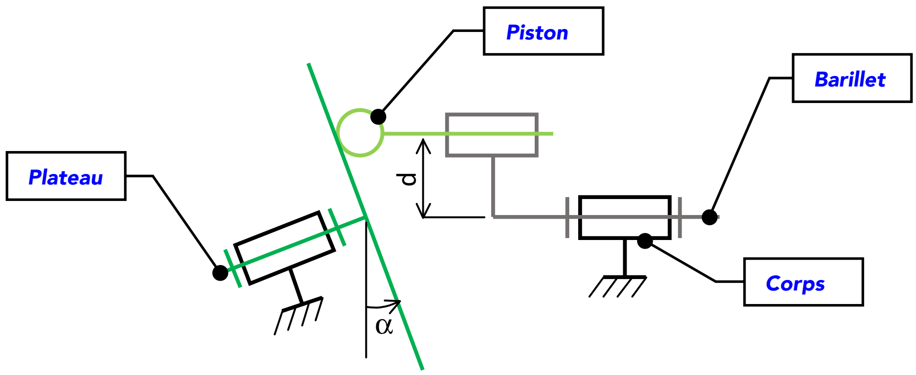
→ n = 5 est plus régulier (amplitude moindre)

→ que n = 4

TD : Programmation – analyse numérique
Pompe à pistons axiaux – régularité de débit

2. Modélisation

On adopte la modélisation suivante :



Si θ caractérise la rotation du barillet ($\theta = \omega t$, ω constante) autour de son axe et α l'inclinaison du plateau (constante pour un réglage donné), alors on démontre que le déplacement et la vitesse de déplacement d'un piston sont donnés par les relations :

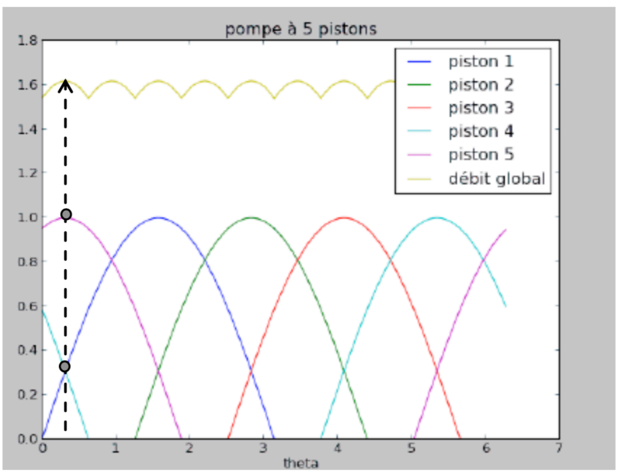
$$\begin{cases} z = d\tan(\alpha)\cos(\theta) \\ \dot{z} = -d\,\omega\tan(\alpha)\sin(\theta) \end{cases}$$

Dans un premier temps, pour simplifier, on considère que la contribution d'un piston au débit instantané global de la pompe est de la forme :

$$q(t) = \begin{cases} K\sin(\theta) & 0 \le \theta \le \pi \quad \text{(refoulement)} \\ 0 & \pi < \theta < 2\pi \quad \text{(aspiration)} \end{cases}$$ où K est une constante.

Pour la suite, on choisit arbitrairement $K = 1$. Pour chacun des n pistons de la pompe (tous décalés de $\frac{2\pi}{n}$), on a donc :

$$\begin{cases} q_{1,n}(\theta) = \max(0, \sin(\theta)) \\ q_{2,n}(\theta) = \max\left(0, \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right)\right) \\ q_{i,n}(\theta) = \max\left(0, \sin\left(\theta - \frac{2\pi(i-1)}{n}\right)\right) \\ q_{n,n}(\theta) = \max\left(0, \sin\left(\theta - \frac{2\pi(n-1)}{n}\right)\right) \end{cases}$$



Le débit instantané global de la pompe est alors donné par : $Q_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} q_{i,n}(\theta)$.

TD : Programmation – analyse numérique
Pompe à pistons axiaux – régularité de débit

3. Travail à effectuer

Q1 *Écrire une fonction qui renvoie la valeur du débit instantané $q_{i,n}(\theta)$ du i-ième piston parmi les n de la pompe.*
Tracer cette fonction pour $i = 3, n = 5$ et $\theta \in [0;2\pi]$.

Q2 *Écrire une fonction qui renvoie la valeur du débit global $Q_n(\theta)$.*
Tracer sur un même graphe et pour $n = 5$, les $q_{i,n}(\theta)$ et $Q_n(\theta)$ pour $\theta \in [0;2\pi]$.

Q3 *Tracer sur un même graphe, pour $n \in [1;10]$ et $\theta \in [0;2\pi]$, les débits $Q_n(\theta)$.*

On définit le coefficient d'irrégularité de débit d'une pompe à n pistons par :

$$\delta_n = \left|\frac{Q_n(\theta) - Q_{n,moyen}}{Q_{n,moyen}}\right|_{max}, \quad \text{où} Q_{n,moyen} = \frac{1}{T}\int_0^T Q_n(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

La période est donnée par

$$\begin{cases} \text{si} & n=1 & T=2\pi \\ \text{si} & n \text{ pair} & T=\frac{2\pi}{n} \\ \text{sinon} & & T=\frac{2\pi}{2n} \end{cases}$$

Q4 *Écrire une fonction qui renvoie $Q_{n,moyen}$ pour un n donné.*
On pourra écrire une fonction qui a pour argument n et renvoie la période T.
Pour calculer l'intégrale, on utilisera la méthode des rectangles à gauche :

$$\int_a^b f(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{N-1} f\left(a + k\frac{b-a}{N}\right)\frac{b-a}{N}.$$

Q5 *Écrire une fonction qui calcule le coefficient d'irrégularité de débit δ_n d'une pompe à n pistons.*
Tracer un graphe point par point de δ_n pour $n \in [1;10]$. Conclure.

4. Pour aller plus loin ...

Dans un second temps, on souhaite prendre en compte le volume mort dans chaque cylindre entre les phases d'aspiration et de refoulement du fluide.

En effet, le temps que le piston obture l'orifice d'admission de son cylindre respectif, sa contribution au débit global instantané de la pompe est nulle.

L'expression du débit instantané pour un piston est alors plutôt de la forme :

$$q(t) = \begin{cases} \sin(\theta) & \text{si} \quad \phi \le \theta \le \pi. \\ 0 & \text{si} \quad 0 \le \theta < \phi \text{ et } \pi < \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

où ϕ est l'angle de rotation du barillet nécessaire à l'obturation de l'orifice d'admission.

Q6 *Reprendre les questions 1 à 5 en tenant compte de l'angle ϕ.*
On prendra pour les applications $\phi = 35\,°$. Conclure.