TP Euler Vectoriel

Exercice 1

1. Programmer la fonction `vectoriel`$(a, b, x0, y0, f, g, n)$ telle que

   Entrées : $(a, b, x0, y0, f, g, n)$ sont les données du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in [a,b], & x' = f(x,y,t) \\ & y' = g(x,y,t) \\ & x(a) = x0 \\ & y(a) = y0 \end{cases}$$

   Sorties : t, x, y respectivement la liste de discrétisation de l'intervalle $[a, b]$, les listes des valeurs approchées de $x(t_i)$ et $y(t_i)$.

2. **[Exemple de modèle Proie-Prédateur : le modèle de Lokta-Volterra]**

$$\begin{cases} x' &= x(\alpha - \beta y) \\ y' &= -y(\gamma - \delta x) \end{cases}$$

   avec $\alpha = 1.15, \beta = 0.015, \gamma = 1.25$ et $\delta = 0.005$.
   Ce système d'équations différentielles modélise l'évolution d'une population constituée de proies et prédateurs.

   $x(t)$ est l'effectif de la population de proies à l'instant t.
   $y(t)$ est l'effectif de la population de prédateurs à l'instant t.
   α est le taux de reproduction des proies.
   β est le taux de mortalité des proies dû aux prédateurs.
   γ est le taux de mortalité des prédateurs.
   δ est le taux de reproduction des prédateurs.

   (a) Tracer sur un même graphique l'évolution des proies et prédateurs sur 30 unités de temps avec conditions initiales $x(0) = 300$ et $y(0) = 150$.

   (b) Tracer pour $t \in [0, 30]$, les points de coordonnées $(x(t), y(t))$.

3. **[Pendule]**

   (a) Pendule : $\theta'' + \sin(\theta) = 0$ où θ est l'angle entre le pendule et la verticale.

      i. Tracer le graphe de la solution numérique θ du schéma d'Euler explicite en fonction du temps sur l'intervalle de temps de $[0, 4\pi]$ avec $n = 500, \theta(0) = \dfrac{\pi}{4}$ et $\theta'(0) = 0$.

      ii. Tracer la position du pendule au cours du temps.

      iii. Tracer la courbe de l'énergie, $E(t) = \dfrac{1}{2}(\theta')^2 - \cos\theta$, du pendule au cours du temps.

   (b) **Pendule approximation des petites oscillations :** $\theta'' + \theta = 0$.

      Comparer les solutions approchées de cette équation et de $\theta'' + \sin(\theta) = 0$ sur l'intervalle de temps $[0, 4\pi]$ avec $n = 500, \theta(0) = \dfrac{\pi}{4}$ et $\theta'(0) = 0$. Commenter.

Exercice 2

1. Soit le problème de Cauchy :

$$(\mathscr{P}) \begin{cases} y(a) = y0 \\ \forall t \in [a,b],\ y'(t) = f(y(t),t) \end{cases}$$

   La méthode d'Euler est basée sur l'approximation de la dérivée par le taux d'accroissement c'est à dire
$$y'(t_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$
   où $y(t_i) \approx y_i$ et $t_{i+1} = t_i + h$.

   En déduire une approximation de $y''(t_i)$ en fonction de y_{i+1}, y_i, y_{i-1} et h.

2. En déduire une autre méthode pour résoudre

$$\begin{cases} \forall t \in [0,4\pi], & \theta'' + \sin(\theta) = 0 \\ & \theta(0) = \dfrac{\pi}{4} \\ & \theta'(0) = 0 \end{cases}$$

   puis la programmer et tracer la solution approchée obtenue.

3. Superposer le graphe obtenu à l'aide de la méthode précédente et celui obtenu à l'aide d'Euler Vectoriel.

Exercice 3 [Cinétique Chimique]

Une solution composée de réactifs A, B, C où deux réactions chimiques $A \to B$ et $B \to C$ d'ordre 1 sont modélisées par le système différentiel

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t} & = & -[A] \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}[B]}{\mathrm{d}t} & = & 2[A] - [B] \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}[C]}{\mathrm{d}t} & = & \dfrac{[B]}{2} \end{cases}$$

1. Tracer l'évolution des concentrations des trois réactifs A, B, C entre 0 et 8s par pas de 0.01s, en partant des concentrations initiales $[A] = 1, [B] = [C] = 0$.
2. À quel moment, à 0.01s près, les concentrations en produits A et C sont-elles égales ?