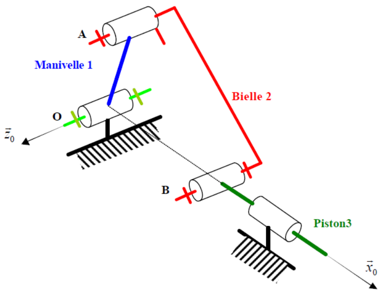
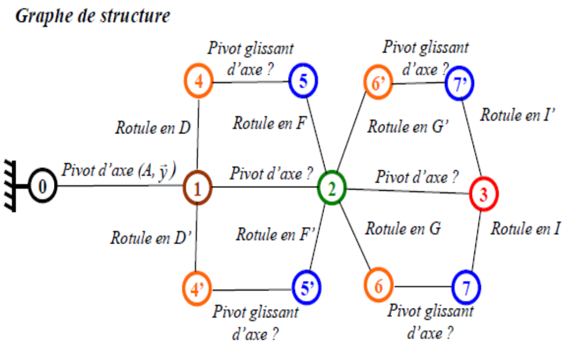
Cycle 3: Etude, modélisation des systèmes dynamiques à masse conservative

Chapitre 1 : Etude des systèmes hyperstatiques – Liaisons équivalentes

$$\boxed{h = I_S - r_S \quad ou \quad h = I_S - E_S + m}$$





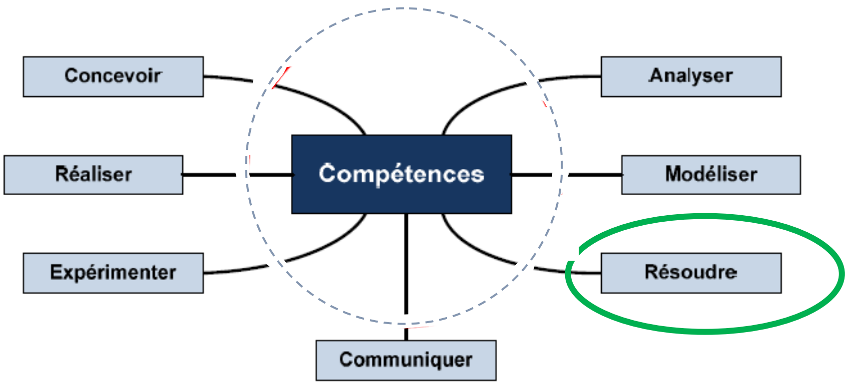
Problématique

Comment évaluer l'hyperstaticité d'un mécanisme ? Comment modifier les contraintes dans les Liaison afin de rendre un mécanisme isostatique ?

Savoir

C. Résoudre:

- Déterminer la liaison cinématiquement équivalente à une association de liaisons
- Déterminer les mobilités d'un mécanisme
- Déterminer le degré d'hyperstaticité d'un mécanisme
- Identifier les conséquences géométriques de l'hyperstaticité
- Améliorer un modèle pour le rendre isostatique



L'objet de ce cours est d'apporter les principaux éléments permettant de concevoir une solution technique en réalisant un **choix motivé des liaisons et de l'architecture d'un mécanisme.** Ces concepts seront fréquemment utilisés dans les activités de construction.

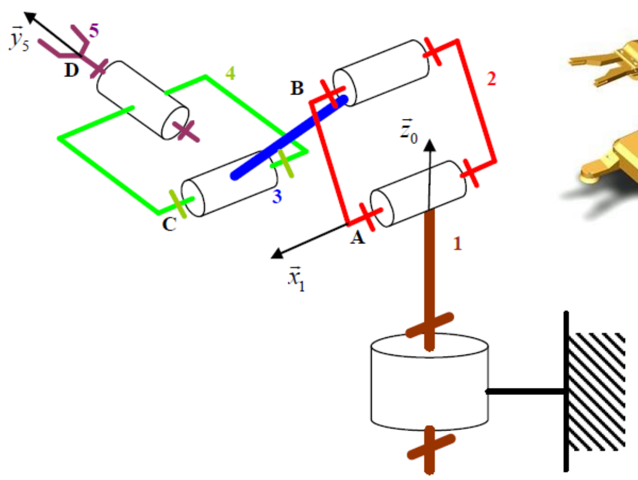
1. Etude des chaînes de solides indéformables

1.1. Chaînes ouvertes de solides

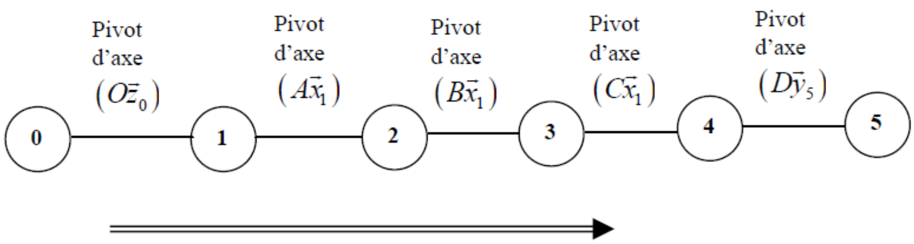
1.1.1. Définition

On dit qu'un mécanisme est à **chaîne ouverte** de solides lorsque **son graphe des liaisons n'est pas bouclé.**

Cela caractérise les mécanismes de type bras de robot, comme le montre le schéma cinématique ci-contre.



1.1.2. Graphe des liaisons



Pas de boucle (ou cycle) donc on a une chaîne ouverte de solides

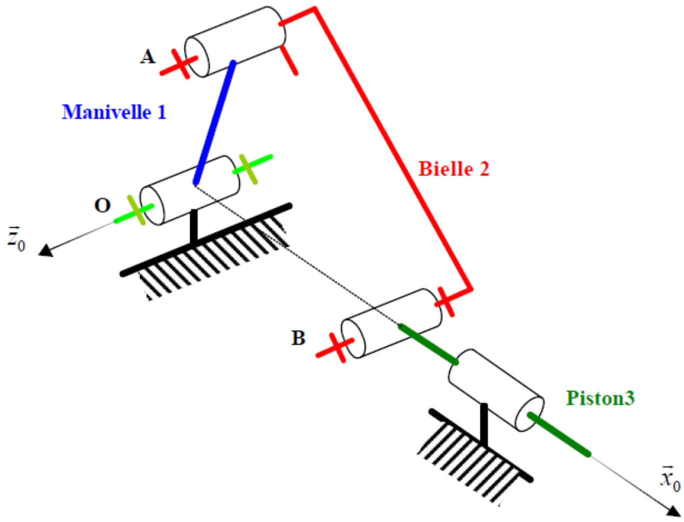
1.2. Chaînes fermées de solides

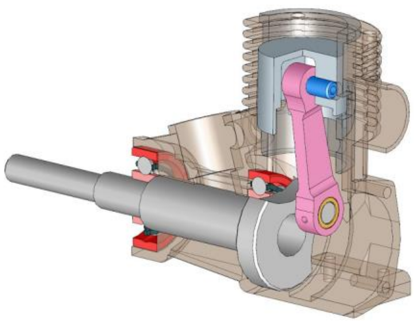
1.2.1. Définition

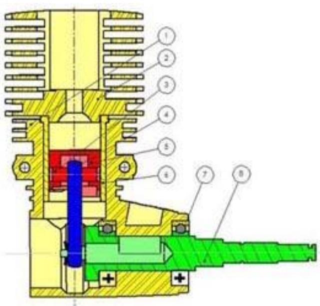
Un mécanisme à **chaîne fermée** de solide est un mécanisme qui présente un **graphe des liaisons bouclé.** On dit aussi qu'il ne présente qu'un seul cycle.

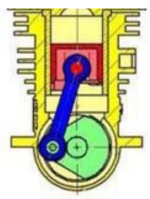
Cela caractérise les mécanismes de type transformation de mouvement.

Exemple : Système Bielle-Manivelle - Piston



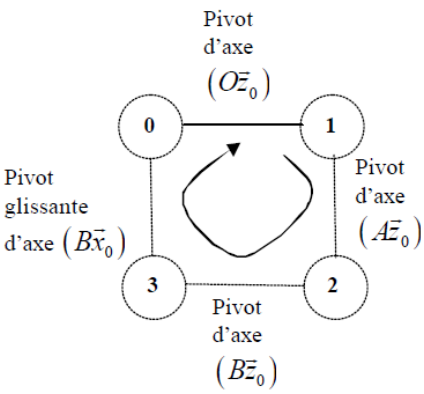






1.2.2. Graphe des liaisons

Le graphe des liaisons ne comporte qu'une seule boucle ou un seul cycle donc il s'agit d'un mécanisme à chaine fermée de solides.

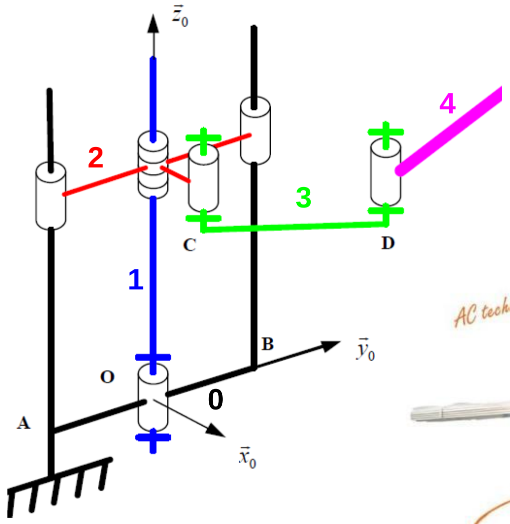


1.3. Mécanisme à chaîne fermée complexe

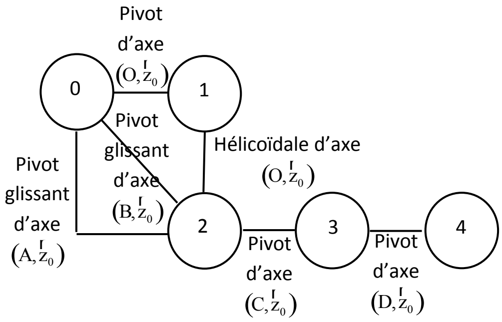
1.3.1. Définition

Un mécanisme à chaîne complexe est un mécanisme pour lequel le graphe des liaisons présente des cycles imbriqués (partie de chaînes fermées) avec ou sans des parties de chaînes ouvertes.

Exemple : Robot de manutention



1.3.2. Graphe des liaisons



Le mécanisme comporte :
Une chaîne ouverte de solides : 2 - 3 – 4

Trois cycles, mais seulement deux cycles indépendants :

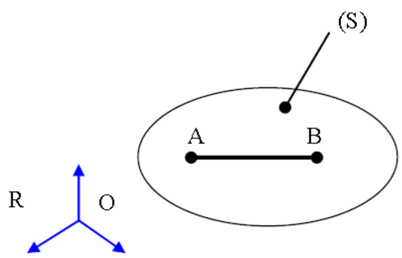
- ✓ *0 - 2 - 1 - 0 par la liaison pivot glissant d'axe (A, $\vec{z}_0$), la liaison hélicoïdale et la liaison pivot d'axe (O, $\vec{z}_0$),*
- ✓ *0 - 2 - 1 - 0 par la liaison pivot glissant d'axe (B, $\vec{z}_0$), la liaison hélicoïdale et la liaison pivot d'axe (O, $\vec{z}_0$),*
- ✓ *0 - 2 - 0 liaison (équivalente) en parallèle : liaison pivot glissant d'axe (A, $\vec{z}_0$) et liaison pivot glissant d'axe (B, $\vec{z}_0$), = cycle dépendant des 2 précédents.*

1.4. Liaisons équivalentes

1.4.1. Rappel sur la notion de torseur cinématique

- Le **champ des vecteurs vitesse** des points du solide (S) dans son mouvement par rapport au repère (R) est représenté, au point A, par le **torseur cinématique** suivant :

$$\{\upsilon_{S/R}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{S/R} \\ \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \end{array} \right\}_A$$



- Le torseur cinématique peut aussi s'écrire sous la forme suivante :
  (ci-dessous dans le cas de 6 dégrés de liberté entre R et S)

$$\{\upsilon_{S/R}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{S/R} \\ \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{cc} p_{S/R} & u_{A\in S/R} \\ q_{S/R} & v_{A\in S/R} \\ r_{S/R} & w_{A\in S/R} \end{array} \right\}_{A\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

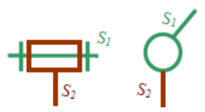
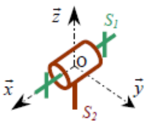
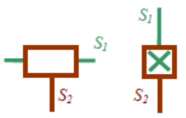
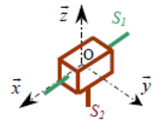
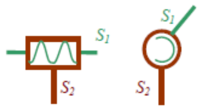
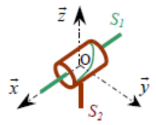
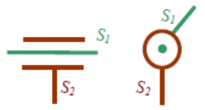
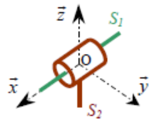
(rad/s) (m/s)

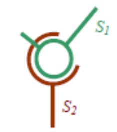
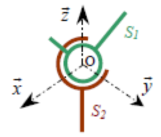
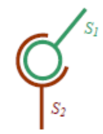
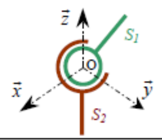
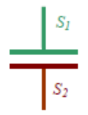
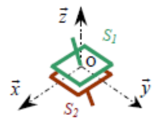
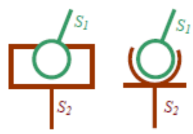
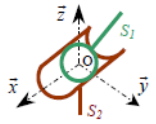
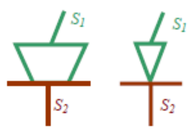
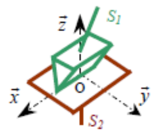
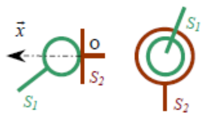
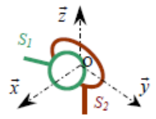
La base de projection doit être précisée.

1.4.2. <u>Rappel sur les liaisons normalisées entre solides</u>

Lorsqu'un solide est en contact avec un autre solide, on dit qu'ils sont liés.
Parmi toutes les liaisons envisageables, l'AFNOR (Association Française de NORmalisation) a retenu les plus courantes, et les a normalisées.

Ces liaisons sont supposées géométriquement parfaites, sans jeu et sans frottements.

degrés de lib.	désignations AFNOR	Schématisation: Projection orthogonale	Schématisation: Perspective	Caractéristiques géométriques	torseur cinématique exprimé dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$	Particularités
1	Liaison pivot			Axe $(O,\vec{x})$	$\{\upsilon_{S2/S1}\} = \left\{ \begin{array}{cc} p_{2/1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{O\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	O sur l'axe de rotation
1	Liaison glissière			Direction $\vec{x}$	$\{\upsilon_{S2/S1}\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & u_{O\in 2/1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{O\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	∀P
1	Liaison hélicoïdale			Axe $(O,\vec{x})$	$\{\upsilon_{S2/S1}\} = \left\{ \begin{array}{cc} p_{2/1} & u_{O\in 2/1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{O\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ avec $u_{O\in 2/1} = \frac{pas}{2\pi} \times p_{2/1}$	O sur l'axe de rotation
2	Liaison pivot glissant			Axe $(O,\vec{x})$	$\{\upsilon_{S2/S1}\} = \left\{ \begin{array}{cc} p_{2/1} & u_{O\in 2/1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{O\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	O sur l'axe de rotation

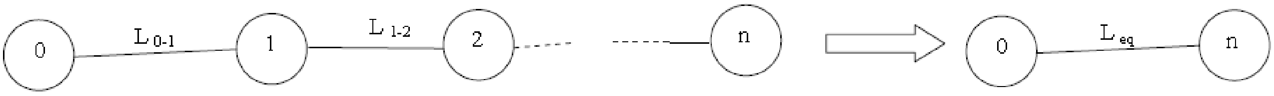
degrés de lib.	Désignations AFNOR	Schématisation Projection orthogonale	Schématisation Perspective	Caractéristiques géométriques	torseur cinématique exprimé dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$	Particularités
2	Liaison sphérique à doigt			Centre O	$\left\{v_{S2/S1}\right\} = {}_O\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ q_{2/1} & 0\\ r_{2/1} & 0\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	O centre de la sphère
3	Liaison sphérique ou liaison rotule			Centre O	$\left\{v_{S2/S1}\right\} = {}_O\left\{\begin{matrix}p_{2/1} & 0\\ q_{2/1} & 0\\ r_{2/1} & 0\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	O centre de la sphère
3	Liaison appui plan			Normale $\vec{z}$	$\left\{v_{S2/S1}\right\} = {}_O\left\{\begin{matrix}0 & u_{O\in 2/1}\\ 0 & v_{O\in 2/1}\\ r_{2/1} & 0\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	∀P
4	Liaison sphère cylindre ou liaison linéaire annulaire			Axe $(O,\vec{x})$	$\left\{v_{S2/S1}\right\} = {}_O\left\{\begin{matrix}p_{2/1} & u_{O\in 2/1}\\ q_{2/1} & 0\\ r_{2/1} & 0\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	O centre de la sphère
4	Liaison cylindre plan ou liaison linéaire rectiligne			Droite de contact $(O,\vec{x})$ et plan tangent au contact	$\left\{v_{S2/S1}\right\} = {}_O\left\{\begin{matrix}p_{2/1} & u_{O\in 2/1}\\ 0 & v_{O\in 2/1}\\ r_{2/1} & 0\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	∀P ∈ plan $(O,\vec{x},\vec{y})$
5	Liaison sphère cylindre ou liaison ponctuelle			point de contact O plan tangent au contact	$\left\{v_{S2/S1}\right\} = {}_O\left\{\begin{matrix}p_{2/1} & 0\\ q_{2/1} & v_{O\in 2/1}\\ r_{2/1} & w_{O\in 2/1}\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	∀P ∈ axe $(O,\vec{x})$

1.4.3. Liaisons cinématiquement équivalentes

Afin de réduire le nombre de liaisons dans un mécanisme, on peut être amené lors d'une approche cinématique à chercher **des liaisons fictives équivalentes à un ensemble de liaisons réelles**.
Cette recherche peut se faire analytiquement ou intuitivement.
Deux cas peuvent alors se présenter selon que les liaisons sont en série ou en parallèle.

Liaisons en SERIE

- Il faut déjà établir le graphe des liaisons (non minimal)



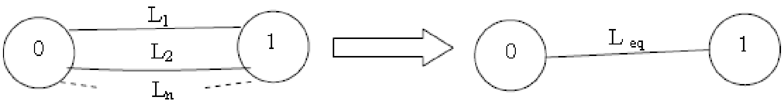
- Au vu de la structure du graphe établi, on définit le torseur cinématique de la liaison équivalente $\{\upsilon_{(n/0)}\}_P$ par la relation de composition des vitesses en écrivant tous les torseurs **au même point** :

$$\underbrace{\{\upsilon_{(n/0)}\}_P}_{\text{torseur de la liaison équivalente}} = \sum_{i=1}^{n} \{\upsilon_{(i/i-1)}\}_P$$

On peut ainsi déterminer la liaison cinématiquement équivalente, dont le torseur cinématique peut correspondre ***parfois*** *à celui d'une liaison normalisée (mais pas obligatoirement).*

Liaisons en PARALLELE

- Comme précédemment, il faut déjà établir le graphe des liaisons (non minimal)

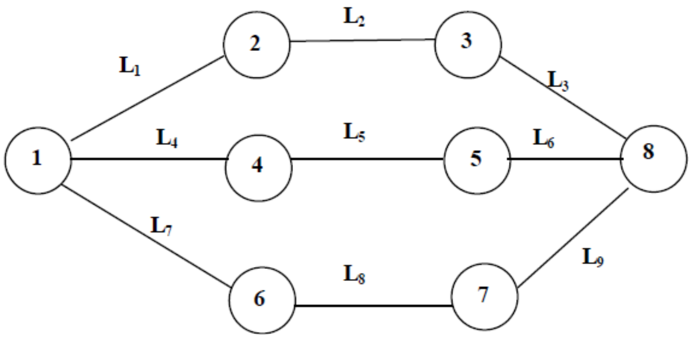


- La compatibilité cinématique des **n** liaisons en parallèle avec la liaison équivalente, s'exprime par une identité des composantes de tous ces torseurs réduits au même point :

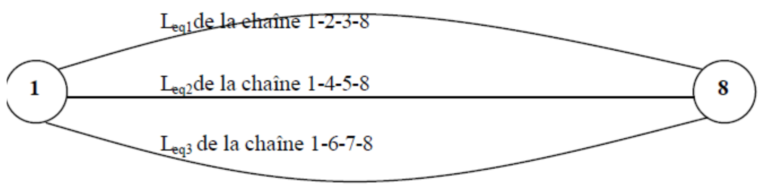
$$\boxed{\{\upsilon_{éq(S_1/S_2)}\}_P = \{\upsilon_{1(S_1/S_2)}\}_P = \dots \{\upsilon_{i(S_1/S_2)}\}_P = \dots = \{\upsilon_{n(S_1/S_2)}\}_P} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n$$

1.4.4. Liaisons équivalentes d'un mécanisme

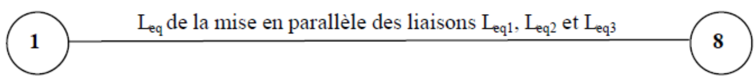
Prenons un mécanisme représenté par son graphe des liaisons ci-contre :



Rechercher la liaison équivalente entre 1 et 2 revient à chercher le graphe des liaisons soit dans un premier temps un graphe équivalent à celui-ci :
(méthode liaison en série)



Puis enfin à :
(méthode liaison en parallèle)



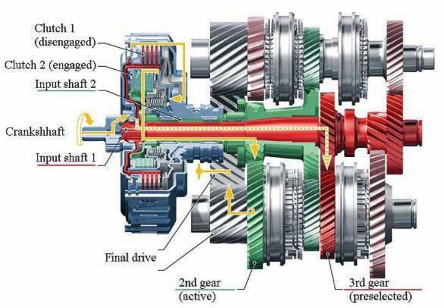
2. Objectifs de la théorie des mécanismes et des calculs d'hyperstaticité

L'ingénieur doit constamment procéder à des choix lors des différentes étapes du processus de conception afin d'améliorer les performances des systèmes.
Cette amélioration passe forcément par la conception de la meilleure solution technique en réalisant un choix motivé des liaisons et de l'architecture d'un mécanisme. En effet, l'ingénieur s'appuie obligatoirement sur des modèles de mécanismes plus ou moins détaillées, car seuls les modèles permettent de simuler le comportement d'un produit et d'en appréhender le réel.
Lors de la conception d'une machine, il est nécessaire de s'assurer que chaque **mécanisme envisagé donne bien les mobilités souhaitées**. L'étude du mécanisme permet également d'obtenir des informations précieuses pour la conception des liaisons.

Définition d'un mécanisme *: un mécanisme est un ensemble de pièces positionnées entre-elles par des liaisons dans le but de réaliser une ou plusieurs fonctions.*

Les hypothèses de travail en théorie des mécanismes sont celles de la cinématique du solide :
- *Des pièces modélisées par des* ***solides indéformables***
- *Des* ***liaisons parfaites*** *(géométries parfaites, sans jeu, sans frottement)*
- *Des pièces de* ***masse nulle*** *(efforts d'inertie nuls)*

Exemples: Boite de vitesses = mécanisme



L'objet de ce cours est d'introduire la **théorie des mécanismes**, outil préliminaire dans le processus de conception, qui a pour finalité de :

maîtriser la mobilité et l'hyperstaticité d'un mécanisme modélisée par des liaisons « théoriques »

3. Etude cinématique de l'hyperstatisme

On parle d'**hyperstatisme** lorsque la cinématique d'un mécanisme ne permet son montage qu'avec des conditions sur la position ou l'orientation des liaisons.

On parle d'**isostatisme** lorsque l'on peut réaliser la fermeture de la chaine cinématique quelle que soit la position et l'orientation des directions caractéristiques des liaisons.

Exemple : pilote automatique de safran

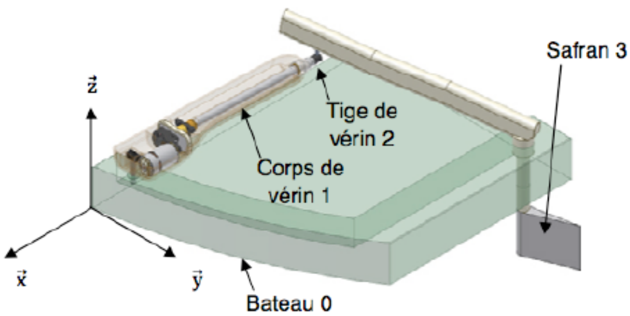


Figure 1 : Perspective du pilote automatique de safran

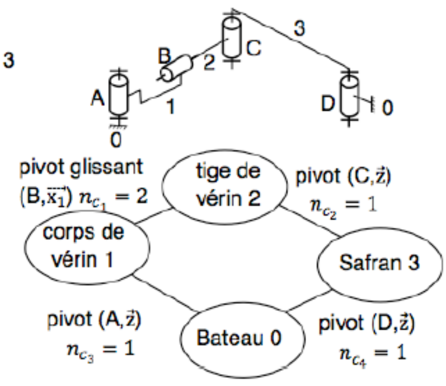


Figure 2 : Modélisation des liaisons (schéma cinématique et graphe de liaisons)

La fermeture d'une telle chaine impose plusieurs conditions. En observant le bouclage par la liaison ayant le plus de degrés de liberté (ici la pivot glissant), on identifie la condition suivante droite (AB) = droite (BC) :

- fermeture angulaire : 1 parallélisme : (AB)//(BC),
- fermeture géométrique : 1 coïncidence des centres de liaison : $(\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}).\vec{z}$

Le mécanisme est donc **hyperstatique de degré 2.**
Afin de déterminer le degré d'hyperstatisme de façon systématique et rigoureuse, il convient de définir un certain nombre de grandeurs.

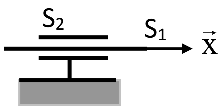
3.1. Nombre d’inconnues cinématiques et statiques : Ic et Is

- $\{\tau_S\}$ introduit un certain nombre d’inconnues statiques (coordonnées d’efforts), égal au nombre de coordonnées indépendantes du torseur, soit $\mathbf{I_s}$ ce nombre que nous appellerons **inconnues statique**
- $\{\vartheta\}$ introduit un certain nombre d’inconnues (arbitraires) cinématiques égal au nombre des coordonnées indépendantes du torseur, soit $\mathbf{I_c}$ ce nombre que nous appellerons **inconnue cinématique**

Pour une liaison on obtient la relation suivante : $\boxed{I_c + I_s = 6}$

Avec $1 \leq I_c \leq 5$ *et* $1 \leq I_s \leq 5$

Exemple : **Liaison pivot glissant d’axe** $(O,\vec{x})$



$$\{\vartheta_{(S_1/S_2)}\} = \begin{Bmatrix} p & u \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A \qquad \{\tau_{(S_2 \to S_1)}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_A$$

Deux inconnues cinématiques (degrés de mobilité) : $\mathbf{I_c = 2}$, et 4 inconnues statique **Is=4**
On a bien : Is + Ic =6

Exemple du pilote automatique de safran : Ic = nC1 + nC2 + nC3 + nC4 = 2 + 1 + 1 + 1 = 5
Is= 4+5+5+5 = 19

3.2. Nombre cyclomatique : µ

Le **nombre cyclomatique, noté « µ »** est le **nombre de boucles indépendantes du graphe** des liaisons d’un mécanisme.
Sur l’exemple du robot de manutention ci-dessus, on a 3 boucles mais uniquement 2 sont indépendantes. On a donc : µ = 2.

Notons :

- N_L : le nombre de liaisons du graphe des liaisons.
- N_P : le nombre de solides du graphe des liaisons (bâti compris).

$\boxed{\mu = N_L - N_P + 1}$

Exemple du pilote automatique de safran (calcul inutile au vu du graphe des liaisons) :
Le pilote automatique de safran est constitué de 4 solides et 4 liaisons. On a donc NL = 4 et NP = 4.
Ce qui donne : $\mu = 4 - 4 + 1 = 1$ *cycle indépendant*

3.3. Nombre d'équations cinématiques et statiques : Ec et Es

3.3.1. Cinématique

Les relations entre les mobilités sont obtenues par des fermetures angulaires et géométriques. En écrivant une fermeture cinématique pour chaque cycle indépendant du graphe des liaisons, et sachant qu'on obtient un système d'équation de :

$$\sum \left\{ \vartheta_{(i/i+1)} \right\} = \{0\}$$

- 6 équations dans l'espace (3 rotations + 3 positions) par cycle indépendant
- 3 équations dans le plan (1 rotation + 2 positions) par cycle indépendant,

on obtient un nombre d'équations cinématiques : $\boxed{Ec = 6\mu}$

Exemple du pilote automatique de safran : problème spatial donc Ec = 6.1 = 6

3.3.2. Statique

Pour un mécanisme composé de **N_P solides**, on a (N_P-1) solides si l'on ne comptabilise pas le bâti (sur lequel on ne peut pas faire d'isolement donc sur lequel on ne peut pas appliquer le Principe Fondamental de la Statique).
On peut donc **appliquer le Principe Fondamental de la Statique (N_P -1) fois,** c'est à dire obtenir un système à 6**(N_P - 1) équations.** Le nombre d'équations issues de l'application du PFS est :

$$\boxed{E_S=6(N_P-1)}$$

Exemple du pilote automatique de safran : problème spatial donc Ec = 6(4-1) = 18

3.4. Calcul du degré m de mobilité du mécanisme

Le degré de mobilité (cinématique) « m » d'un mécanisme correspond au nombre de paramètres cinématiques indépendants nécessaires pour définir toutes les inconnues cinématiques.
On appelle usuellement Ec le nombre d'équations scalaires issues de (ou des) la fermeture(s) cinématique(s).
Soit **r_c le rang du système**, c'est à dire le **nombre d'équations indépendantes** (toutes sauf celles du type « 0=0 »), issues des Ec équations du mécanismes.
On définit le degré de mobilité cinématique « m » du mécanisme par la différence entre le nombre d'inconnues cinématiques et le rang du système d'équations de cinématique :

$$\boxed{m = I_c - r_c}$$

avec :

- *Ic : nombre total d'inconnues cinématiques de liaisons*
- *r_c : rang du système d'équations de cinématique ($r_c \leq Ec$)*

Le degré de mobilités « m » du mécanisme correspond :

- ✓ à autant d'équations de fermetures qui ne donneront pas de relations entre les inconnues des liaisons.
- ✓ au nombre d'inconnues cinématiques indépendantes qu'il faut se fixer pour déterminer les autres.

Remarque : si m = 0, le système est cinématiquement bloqué !

Cependant, on constatera que cette **méthode** de détermination de « m » va être **longue et fastidieuse** car on a en général plus de 2 solides dans une chaine géométrique fermée.
Par conséquent, dans les épreuves du concours, on n'utilisera cette technique que si elle est explicitement demandée.
Sinon, on préférera utiliser la méthode présentée ci-dessous.

En **statique**, on a $\boxed{m = I_s - r_s}$

3.5. Détermination pratique du degré de mobilité

On distingue généralement dans le degré de mobilité « m » :

- la **mobilité utile «mu»** donnée par le nombre de paramètres cinématiques indépendants d'entrées/sorties du mécanisme (paramètres où l'on doit « imposer » un mouvement pour animer la sortie du mécanisme)

- la **mobilité interne «mi»** donnée par le nombre de paramètres cinématiques internes indépendants ne participant pas au mouvement du mécanisme

En résumé : $\boxed{m = m_u + m_i}$

avec :
- *m : mobilités dans le mécanisme,*
- *mu: mobilités utiles (voulue dans le mécanisme),*
- *mi : mobilités interne (mobilité existant dans le mécanisme indépendamment de la mobilité utile).*

Remarque : si m = 0, le système est cinématiquement bloqué !

« Astuces » pour déterminer :

• la **mobilité utile «mu»:**
« Bloquer » physiquement les solides qui correspondent aux entrées/sorties du mécanisme. La mobilité utile correspond alors au nombre de pièces qu'il a fallu « bloquer » pour figer complètement le mécanisme.

• la **mobilité interne «mi» :**
« Bloquer » physiquement les solides qui correspondent aux entrées/sorties du mécanisme et compter ensuite les mouvements internes possibles que ne participent pas au mouvement d'entrée-sortie.

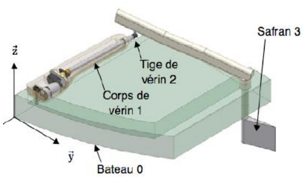
Exemple du pilote automatique de safran : m = 1 + 0 = 1 avec :
mu = 1 (sortie voulue du piston 2 par rapport au corps du vérin 1) ; mi = 0

3.6. Degré d'hyperstatisme : h (analyse cinématique)

Le degré d'hyperstatisme (nombre d'équations de fermetures cinématiques redondantes par rapport aux inconnues cinématiques) est donné par la formule :

Méthode robuste et pratique à exploiter sans définir m_u et m_i	Méthode rapide et difficile à exploiter si on connaît $m = m_u + m_i$
$\boxed{h = Ec - r_c}$ Avec : • h : degré d'hyperstatisme du mécanisme • Ec : nombre d'équations cinématiques de fermetures angulaires et géométriques du mécanisme • r_c : rang du système d'équations de cinématique ($r_c \leq Ec$) Remarque : $m = Ic - r_C$ Ic : nombre total d'inconnues cinématiques de liaisons	$\boxed{h = Ec - Ic + m}$ Avec : • h : degré d'hyperstatisme du mécanisme • Ec : nombre d'équations cinématiques de fermetures angulaires et géométriques du mécanisme • Ic : nombre d'inconnues cinématiques du mécanisme (nombre de degrés de liberté de l'ensemble des liaisons) • m : nombre de mobilités du mécanisme

Exemple du pilote automatique de safran :
problème spatial : h = 6. (4 − 4 + 1) − (2 + 1 + 1 + 1) + (1 + 0) = 2 $\Rightarrow$ ***mécanisme hyperstatique***
(on retrouve le résultat trouvé «par expérience »)



3.7. Degré d'hyperstatisme : h (analyse statique)

On a :

$$\boxed{E_S=6(N_P -1)}$$

Sur ces équations, seules r_S sont indépendantes.

$$\boxed{r_S = E_S - m}$$

$$\boxed{\text{Avec } m = m_u + m_i}$$

Définitions :

- ✓ On appelle **degré d'hyperstaticité « h »** d'un système mécanique la quantité :

$$\boxed{h = I_S - r_S \quad \textit{ou} \quad h = I_S - E_S + m}$$

Exemple du pilote automatique de safran :
*problème spatial : h = 19-18+1 = 2 ⇒ **ok idem ciné***

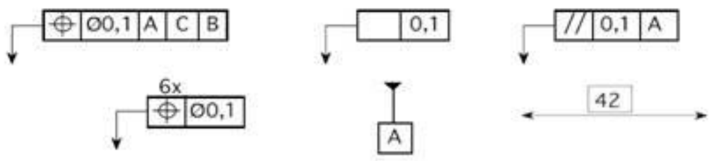
4. Interprétation d'un degré d'hyperstaticité

- ✓ Si **h = 0** : le mécanisme est **isostatique**, la mise en position de l'un des solides par rapport à l'autre est unique.

  L'**isostatisme** est synonyme de simplicité et facilité de réalisation, donc des coûts de production optimisés.

- ✓ Si **h > 0** : le mécanisme est **hyperstatique**, et pour qu'il soit « montable », il faudra prévoir :

  - ***des conditions géométriques*** *entre les directions caractéristiques des liaisons*



  - ***du jeu*** *dans les liaisons*
  - ***des pièces suffisamment flexibles*** *pour que les défauts géométriques ne génèrent pas des efforts trop grds dans liaisons*
  - ***une modification des liaisons*** *permettant de rendre le système isostatique (on augmente les degrés de mobilité de certaines liaisons sans trop augmenter les mobilités internes)*
  - ***un ajout de pièces et de liaisons*** *pour donner localement plus de mobilités.*

  L'**hyperstatisme** entraine une augmentation importante des coûts de production.

- ✓ Si **h < 0** : le mécanisme est **hypostatique** (mécanisme mal conçu qui a plus de mobilités que souhaitées).

A RETENIR : les mécanismes fonctionnels sont soit **isostatiques** soit **hyperstatiques**.

5. Modification d'une modélisation dans le but de la rendre isostatique

Systématiquement aux **épreuves du concours,** vous aurez à proposer une modification du modèle pour le rendre isostatique.

5.1. Méthode rigoureuse

Avec l'approche cinématique, et dans le cas où les équations cinématiques sont définies, il faut :

- *repérer le(s) équation(s) cinématique(s) « 0 = 0 » identiquement vérifiée(s)*
- *déterminer le degré de liberté et la direction associée en relation avec ce(s) équation(s)*
- *ajouter le (ou les) degré(s) de liberté (de translation ou de rotation) à certaines liaisons élémentaires, en faisant attention aux mobilités internes créées.*

5.2. Méthode subjective

Sans les équations cinématiques, seule **l'expérience de l'ingénieur** permet de résoudre ce problème !!!

Exemple du pilote automatique de safran :

Afin de rendre le mécanisme spatial précédant isostatique une solution couramment utilisée est de monter **le vérin sur rotules** (liaisons sphériques à 3 degrés de liberté).

Les mobilités internes qui apparaissent sont:
- la rotation Rx du corps 1 de vérin par rapport au bâti 0.
- la rotation Rx de la tige 2 de vérin par rapport à la barre de safran.

Donc : h = 6. (4 − 4 + 1) − (2 + **3** + **3** + 1) + (1 + **2**) = **0**
$\Rightarrow$ **mécanisme isostatique**

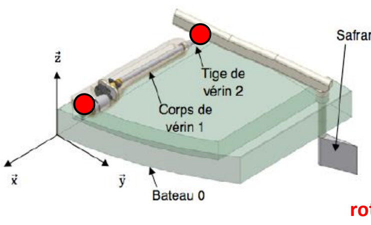


Figure 1 : Perspective du pilote automatique de safran

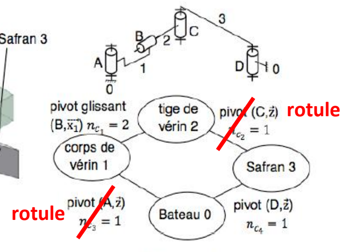


Figure 2 : Modélisation des liaisons (schéma cinématique et graphe de liaisons)

6. Intérêt de concevoir un mécanisme hyperstatique

6.1. Mécanisme isostatique

La tendance naturelle pour un concepteur est de s'orienter vers un mécanisme isostatique.
En effet, un **mécanisme isostatique présente de nombreux avantages** :

- *le PFS (ou PFD) permet de déterminer toutes les actions mécaniques de liaison et donc de faire les choix technologiques adaptés,*
- *pas de contraintes internes entre les solides,*
- *le montage est facilité car les liaisons n'ont pas besoin d'être parfaitement positionnées. Le mécanisme trouve « seul » sa position de fonctionnement.*

Mais un mécanisme isostatique présente aussi un inconvénient majeur : **si une liaison se détériore, tout le mécanisme est mis hors service.**

6.2. Mécanisme hyperstatique

Un concepteur expérimenté pourra dans certaines situations tirer profit des **avantages des mécanismes hyperstatiques** :
- *le mécanisme est plus rigide car certains degrés de liberté sont bloqués plusieurs fois*
- *le mécanisme est plus robuste (résistance accrue et efforts transmissibles plus importants).*

L'inconvénient majeur d'un mécanisme hyperstatique est que la solution entrainera des coûts de production plus ou moins importants.

7. Application au système bielle-manivelle

7.1. Analyse statique

Descriptif :

0 : Bâti

1 : Mannivelle

2 : Bielle

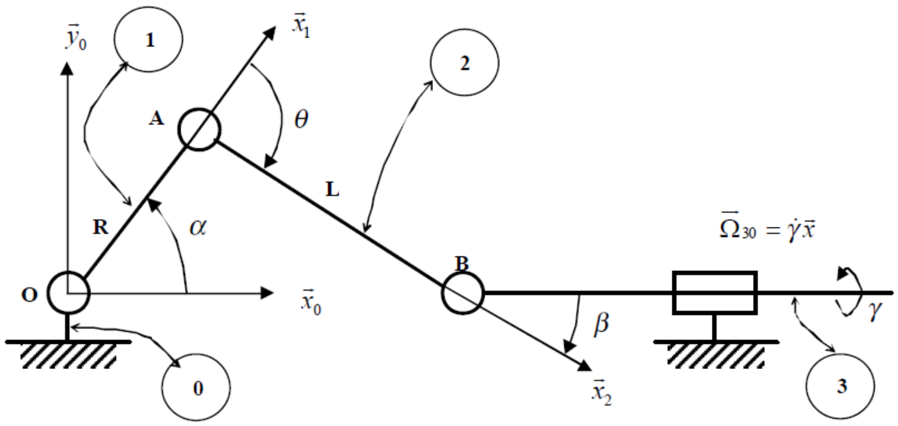
3 : Piston

Paramétrage des solides

$\overrightarrow{OA} = R\vec{x}_1$

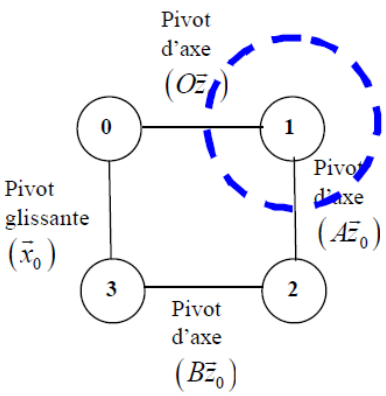
$\overrightarrow{AB} = L\vec{x}_2$

$\overrightarrow{OB} = \lambda\vec{x}_0$



Remarque importante : il n'est pas nécessaire d'appliquer des efforts extérieurs au système pour trouver le nombre d'équations indépendantes dans le système d'équations.

➲ Equilibre de 1 en A :



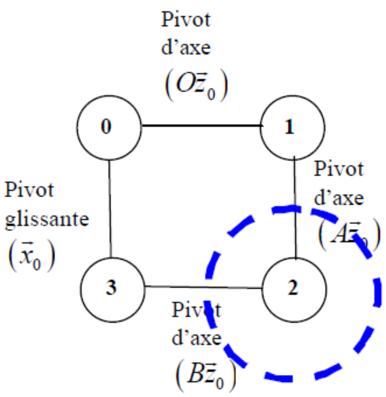
En l'absence d'action mécanique extérieure, le solide 1 est soumis aux actions mécaniques provenant de 0 et de 2 (voir isolement de 1 en pointillé bleu ci-contre)

On a donc l'égalité de torseur ci-dessous :

$$\underbrace{{}_A\begin{Bmatrix} X_{01} & L_{01} - RZ_{01}\sin\alpha \\ Y_{01} & M_{01} + RZ_{01}\cos\alpha \\ Z_{01} & -RY_{01}\cos\alpha + RX_{01}\sin\alpha \end{Bmatrix}}_{_A\{T(0\to1)\}} + \underbrace{{}_A\begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ Z_{21} & 0 \end{Bmatrix}}_{_A\{T(2\to1)\}} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

En effet $\overrightarrow{M_A}(0\to1) = \overrightarrow{M_O}(0\to1) + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{R}(0\to1) = \begin{vmatrix} L_{01} \\ M_{01} \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -R\cos\alpha \\ -R\sin\alpha \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} X_{01} \\ Y_{01} \\ Z_{01} \end{vmatrix}$ puisque la liaison entre 0 et 1 est une pivot d'axe $(O\vec{z}_0)$

➲ Equilibre de 2 en A :



En l'absence d'action mécanique extérieure, le solide 2 est soumis aux actions mécaniques provenant de 1 (l'opposée de celle qu'exerce 2 sur 1 d'après le théorème des actions réciproques et de 3 (voir isolement de 2 en pointillé bleu ci-contre)

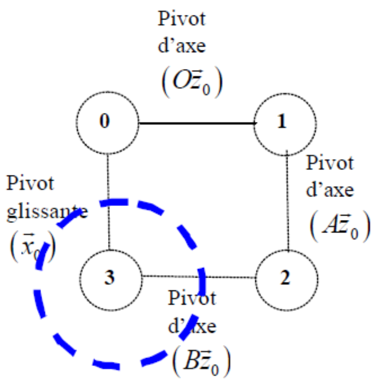
On a donc l'égalité de torseur ci-dessous :

$$\underbrace{{}_A\begin{Bmatrix} X_{32} & L_{32}+LZ_{32}\sin\beta \\ Y_{32} & M_{32}-LZ_{32}\cos\beta \\ Z_{32} & LY_{32}\cos\beta-LX_{32}\sin\beta \end{Bmatrix}}_{{}_A\{T(3\to2)\}} + \underbrace{{}_A\begin{Bmatrix} -X_{21} & -L_{21} \\ -Y_{21} & -M_{21} \\ -Z_{21} & 0 \end{Bmatrix}}_{{}_A\{T(1\to2)\}} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

En effet $\overline{M_A}(3\to2)=\overline{M_B}(3\to2)+\overline{AB}\wedge\overline{R}(3\to2)=\begin{vmatrix} L_{32} \\ M_{32} \\ 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} L\cos\beta \\ L\sin\beta \\ 0 \end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix} X_{32} \\ Y_{32} \\ Z_{32} \end{vmatrix}$ puisque la liaison entre 3 et 2 est une pivot d'axe $(B\vec{z}_0)$

➲ Equilibre de 3 en B :

En l'absence d'action mécanique extérieure, le solide 3 est soumis aux actions mécaniques provenant de 2 (l'opposée de celle qu'exerce 2 sur 3 d'après le théorème des actions réciproques et de 0 (voir isolement de 3 en pointillé bleu ci-contre)



On a donc l'égalité de torseur ci-dessous :

$${}_B\begin{Bmatrix} -X_{32} & -L_{32} \\ -Y_{32} & -M_{32} \\ -Z_{32} & 0 \end{Bmatrix} + {}_B\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{03} & M_{03} \\ Z_{03} & N_{03} \end{Bmatrix} = {}_B\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Au bilan on a le système suivant à 18 équations dans lequel figure 19 inconnues :
$(X_{01},Y_{01},Z_{01},L_{01},M_{01})$; $(X_{21},Y_{21},Z_{21},L_{21},M_{21})$, $(X_{32},Y_{32},Z_{32},L_{32},M_{32})$ et $(Y_{03},Z_{03},M_{03},N_{03})$

<u>Remarque :</u>

Donc au moins un hyperstatisme d'ordre 1 (19-18) si toutes les équations sont indépendantes.

$$\underbrace{{}_A\begin{Bmatrix} X_{32} & L_{32}+LZ_{32}\sin\beta \\ Y_{32} & M_{32}-LZ_{32}\cos\beta \\ Z_{32} & LY_{32}\cos\beta-LX_{32}\sin\beta \end{Bmatrix}}_{{}_A\{T(3\to2)\}} + \underbrace{{}_A\begin{Bmatrix} -X_{21} & -L_{21} \\ -Y_{21} & -M_{21} \\ -Z_{21} & 0 \end{Bmatrix}}_{{}_A\{T(1\to2)\}} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} X_{01}+X_{21}=0 & \boxed{(1)} \\ Y_{01}+Y_{21}=0 & \boxed{(2)} \\ Z_{01}+Z_{21}=0 & \boxed{(3)} \\ L_{01}-RZ_{01}\sin\alpha+L_{21}=0 & \boxed{(4)} \\ M_{01}+RZ_{01}\cos\alpha+M_{21}=0 & \boxed{(5)} \\ -RY_{01}\cos\alpha+RX_{01}\sin\alpha=0 & \boxed{(6)} \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{ll} X_{32}-X_{21}=0 & \boxed{(7)} \\ Y_{32}-Y_{21}=0 & \boxed{(8)} \\ Z_{32}-Z_{21}=0 & \boxed{(9)} \\ L_{32}+LZ_{32}\sin\beta-L_{21}=0 & \boxed{(10)} \\ M_{32}-LZ_{32}\cos\beta-M_{21}=0 & \boxed{(11)} \\ LY_{32}\cos\beta-LX_{32}\sin\beta=0 & \boxed{(12)} \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{ll} -X_{32}=0 & \boxed{(13)} \\ -Y_{32}+Y_{03}=0 & \boxed{(14)} \\ -Z_{32}+Z_{03}=0 & \boxed{(15)} \\ -L_{32}=0 & \boxed{(16)} \\ -M_{32}+M_{03}=0 & \boxed{(17)} \\ N_{03}=0 & \boxed{(18)} \end{array}\right.$$

Pour déterminer les inconnues hyperstatiques, il faut commencer à résoudre le système.
Lorsque l'on est « bloqué », on doit se retrouver avec un système à N équations pour (N+h) inconnues, les h inconnues hyperstatiques sont à choisir dans ce groupe de (N+h) inconnues de manière à pouvoir résoudre le système jusqu'au bout.
(Attention, on ne peut pas choisir n'importe quelles inconnues hyperstatiques).

Regardons cela sur notre exemple, afin de figer les esprits.
De façon évidente, on a d'après les équations (13), (16) et (18) :
$\mathbf{X_{32} = 0}$ $\mathbf{L_{32} = 0}$ **et** $\mathbf{N_{03} = 0}$

On en déduit donc d'après (12) : $Y_{32} = 0$ puis d'après (7) et (8) : $\mathbf{X_{21} = 0}$ **et** $\mathbf{Y_{21} = 0}$**.**
Puis d'après (1) et (2) : $\mathbf{X_{01} = 0}$ **et** $\mathbf{Y_{01} = 0}$.
On remarque alors que l'équation (6) est automatiquement vérifiée, cette équation n'est pas indépendante (ou significative) car c'est une combinaison linéaire des autres.
Enfin, d'après l'équation (14) et les résultats déjà montré, on a : $\mathbf{Y_{03} = 0}$

On a donc **« utilisé »** **10 équations** (1, 2, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 16 et 18) et on a **déterminé** **9 inconnues** :
(X_{32} , L_{32} , N_{03} , Y_{32} , X_{21} , Y_{21} , X_{01} , Y_{01} , Y_{03}).

Conclusion : sur les 18 équations totales du système, seules 17 sont indépendantes, c'est le rang du système **:** $\mathbf{r_S = 17}$. De plus, on a $\mathbf{I_S = 19}$ donc le **degré d'hyperstaticité est** $\mathbf{h = I_S - r_S = 19 - 17 = 2}$
$\Rightarrow$ le système bielle-manivelle-piston est donc **hyperstatique d'ordre 2.**

En effet, on se retrouve donc « bloqué » avec un système à 19-9=10 inconnues pour 18-10=8 équations.

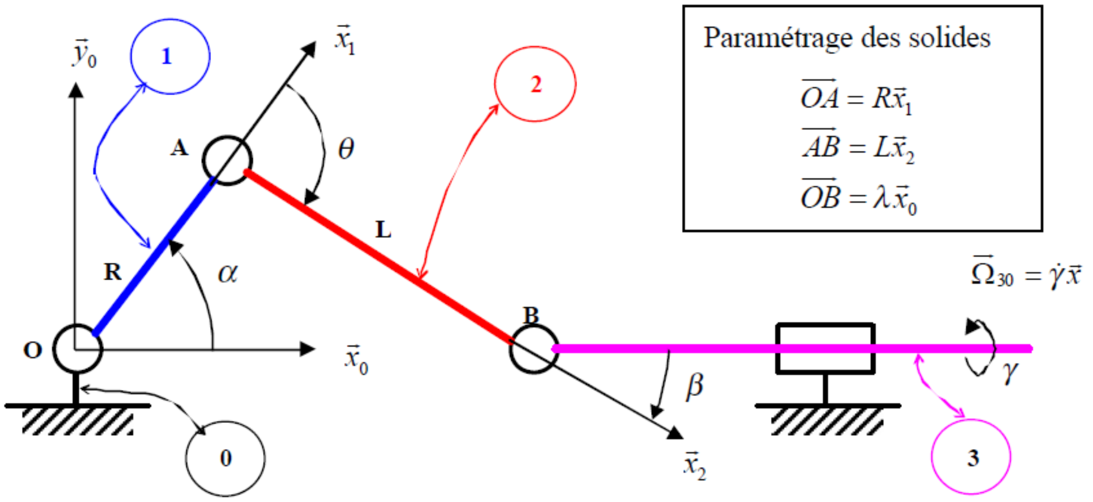
Si on veut le résoudre, il faudrait donc en fixer 2 pour déterminer les 8 autres.
Ce sont les deux inconnues hyperstatiques.

Avec les formules de mobilités :

En **transformant la liaison pivot glissant en une liaison linéaire annulaire**, sans réécrire les équations et en utilisant les formules de mobilité, on obtient :

Is = 3×5+1×2 = 17 (3 liaisons pivot et 1 liaison linéaire annulaire) ;
Es = 6(Np-1) = 6(4-1) = **18** (4 pièces) ;
m =1 (une mobilité) ;
m-h=Es-Is, donc 1-h=18-17 $\Rightarrow$ **h=0 le système est isostatique**.

5.2. Analyse cinématique



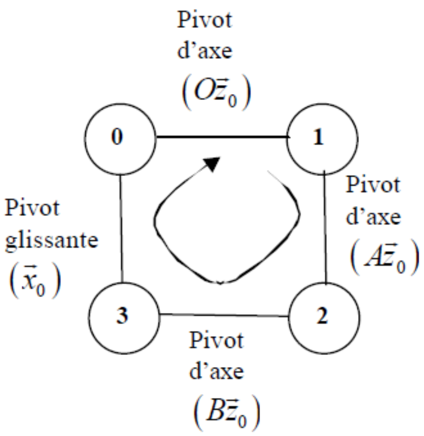
- **0 : Bâti**
- **1 : Mannivelle**
- **2 : Bielle**
- **3 : Piston**

Graphe des liaisons :

De façon évidente, en les comptant sur le graphe des liaisons ou sur le schéma cinématique :

- **N_L = 4**
- **N_P = 4**
- **I_C =1+1+1+2= 5**
  (3 pivots + 1 pivot glissant)

On vérifie bien $\mu = N_L - N_P + 1 = 4 - 4 + 1 = \mathbf{1}$



On a donc une seule fermeture cinématique à écrire :

$$\{\vartheta_{(0/3)}\} + \{\vartheta_{(3/2)}\} + \{\vartheta_{(2/1)}\} + \{\vartheta_{(1/0)}\} = \{0\}$$

On réduit ces torseurs au point « O ».

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} -\dot{\gamma} & -\dot{\lambda} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_O + \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & -\lambda\dot{\beta} \\ \dot{\beta} & \underbrace{0}_{\overrightarrow{OB}\wedge\vec{\Omega}_{32}} \end{matrix}\right\}_O + \left\{\begin{matrix} 0 & R\dot{\theta}\sin\alpha \\ 0 & -R\dot{\theta}\cos\alpha \\ \dot{\theta} & \underbrace{0}_{\overrightarrow{OA}\wedge\vec{\Omega}_{21}} \end{matrix}\right\}_O + \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dot{\alpha} & 0 \end{matrix}\right\}_O = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_O$$

$$\left\{\begin{matrix} 0 = -\dot{\gamma} & 0 = -\dot{\lambda} + R\dot{\theta}\sin\alpha \\ 0 = 0 & 0 = -\lambda\dot{\beta} - R\dot{\theta}\cos\alpha \\ 0 = \dot{\beta} + \dot{\theta} + \dot{\alpha} & 0 = 0 \end{matrix}\right\}$$

Au total, sur les **E_C = 6 équations** du système, seules 4 sont indépendantes, c'est le rang du système **: r_C = 4**.
Le degré d'hyperstatisme est donc **$h = E_C - r_C = 6 - 4 = 2$.**
Le système bielle-manivelle-piston est donc **hyperstatique d'ordre 2**.

Le nombre d'inconnues cinématique est I_C =**5**. On peut donc en déduire le degré de mobilité du mécanisme : **$m = I_C - r_c = 5 - 4 = 1$**. Ce mécanisme a **une seule mobilité utile** (entrée : rotation « α », sortie : translation « λ ») et pas de mobilité interne.

Avec les formules de mobilités :

En transformant la liaison pivot glissant en une liaison linéaire annulaire, sans réécrire les équations et en utilisant les formules de mobilité, on obtient :

$Ic = 3\times1+1\times4 = 7$ (3 liaisons pivot et 1 liaison linéaire annulaire) ;
$Ec = 6(N_L-N_P+1)$ = 6(4-4+1) = **6** (4 pièces) ;
m =1 (une mobilité) ;
m-h=Ic -Ec; donc 1-h=7-6 $\Rightarrow$ **h=0 le système est isostatique**.