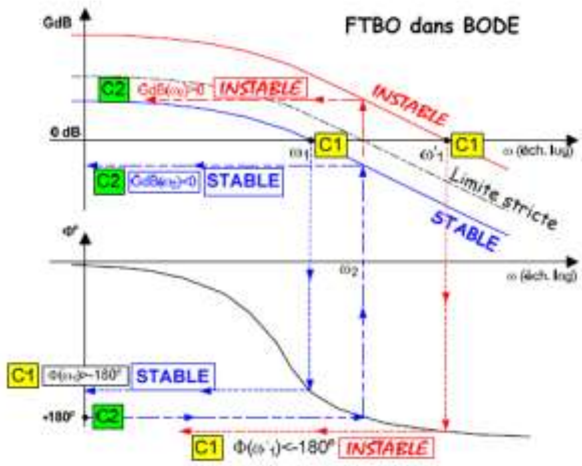
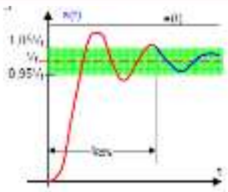
# <u>Cycle 1:</u> Analyser, modéliser et étudier le comportement des Systèmes Linéaires Continus et Invariants

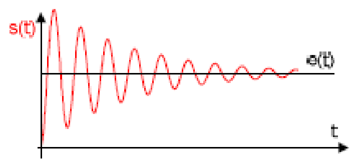
## <u>Chapitre 3</u> – Performances des systèmes asservis




*Problématique*

Comment évaluer la performance des systèmes asservis ? Quelles sont les limites algébriques et graphiques à la stabilité ? Comment influe le gain de la FT sur la précision et la rapidité ?

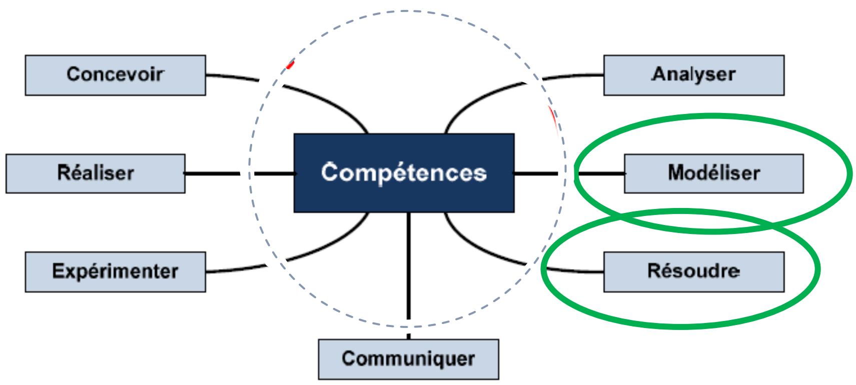





*Savoir*

**B. Modéliser :**

- Déterminer les performances d’un système asservis
- Caractériser la stabilité par les marges
- Déterminer l’influence du gain et de la classe de la FTBO sur la précision et la rapidité



# 1. Propriétés essentielles d'un asservissement

Un système asservi assure 2 fonctions :

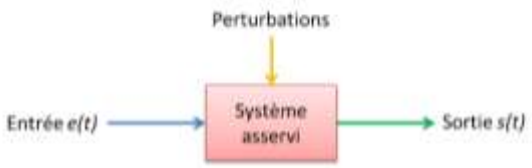
1. Suivre les variations de la grandeur d'entrée
2. S'opposer à l'influence des perturbations

*Définition*

*Systèmes automatiques ou asservis*

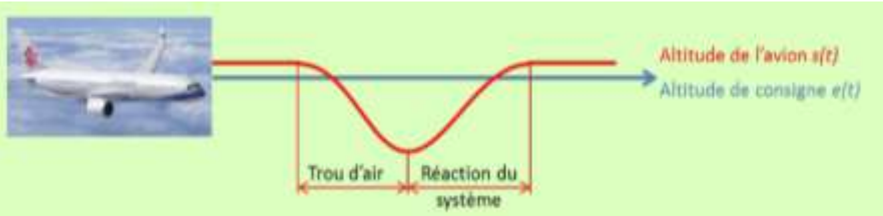
Un système asservi est commandé par **une (ou des) entrée(s)** qu'il transforme en **grandeur(s) de sortie**.
Les entrées sont de deux types :
- la loi de consigne $e(t)$ est une grandeur de commande qui est modifiable ;
- la perturbation : c'est une entrée parasite qui nuit au bon fonctionnement du système. On ne peut pas modifier les perturbations.

La sortie $s(t)$ est une grandeur **observable** (par des capteurs) qui permet de juger de la qualité de la tâche accomplie.




*Exemple*

Pilote automatique d'avion




## 1.1. Le point de vue de l'utilisateur

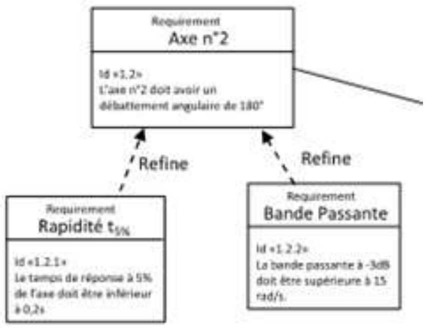
L'asservissement « idéal » est un système ayant une bonne **stabilité,** une bonne **précision** ainsi qu'un **régime transitoire rapide et bien amorti** tout en **étant « robuste * ».** Cependant ces critères de performances ne sont pas toujours compatibles.

* robustesse = aptitude du système à maintenir ses performances malgré une légère variation de ses paramètres internes.

*Par exemple, un processus rapide est généralement léger, il a ainsi une faible inertie et risque d'être peu amorti voire instable. D'autre part si on veut améliorer la précision, on raidit l'asservissement et on risque de tomber alors sur un phénomène d'instabilité.*

Tout l'art de l'automaticien est de réaliser une partie commande permettant de respecter au mieux ces critères.

Ces propriétés sont inscrites dans les spécifications d'un CDC (diagramme des exigences Sysml) avec un niveau de performances toléré *(ex : marge de phase 45°+-5°, écart statique < 2%, $t_{r5\%}$ <0.1s)*




Chronologie :
1. Stabilité
2. Précision
3. Rapidité

Etudier la précision d'un système instable, n'a pas de sens !
Etudier la rapidité d'un système peu précis, n'a pas de sens !

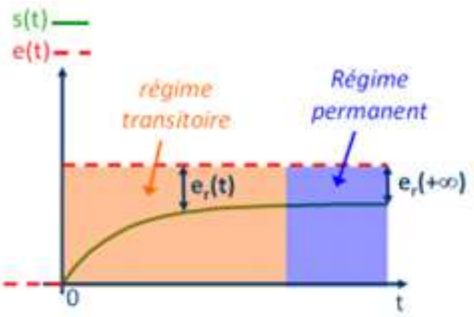
## 1.2. Définitions

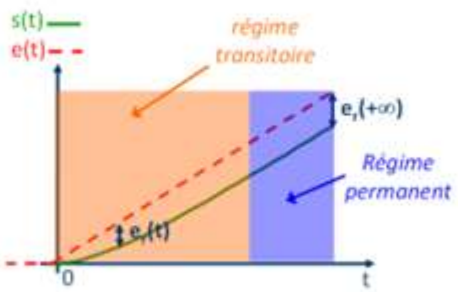
### Précision

La précision est évaluée en régime permanent par l'**erreur statique :** $e_r(+\infty) = e(+\infty) - s(+\infty)$

On parlera **d'erreur de position** lorsque l'**entrée** est **constante** en régime permanent.

On parlera **d'erreur de poursuite** lorsque **l'entrée varie** linéairement en régime permanent.

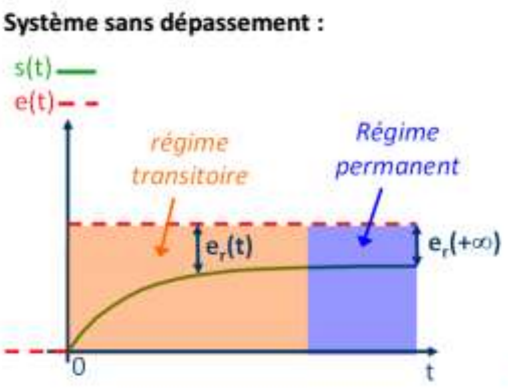


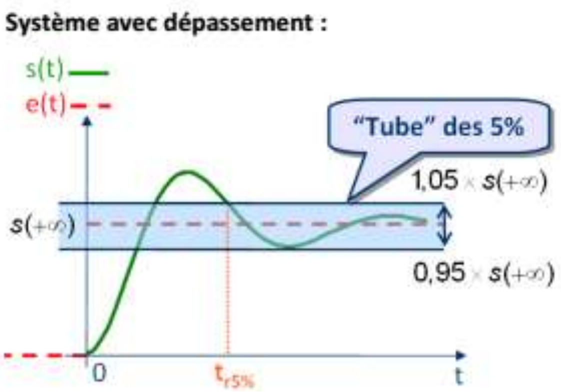




### Rapidité

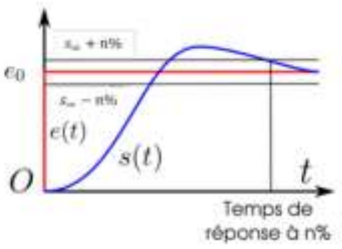
La rapidité est caractérisée par le **temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée** (temps de réponse). La rapidité est évaluée, pour une **entrée en échelon.**

Elle est caractérisiée par le **temps de réponse à 5% : $T_{r5\%}$**

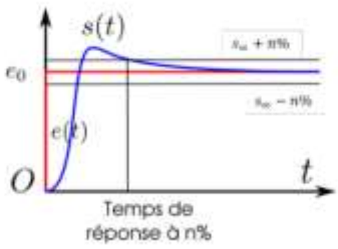



*Exemple:*




Système lent

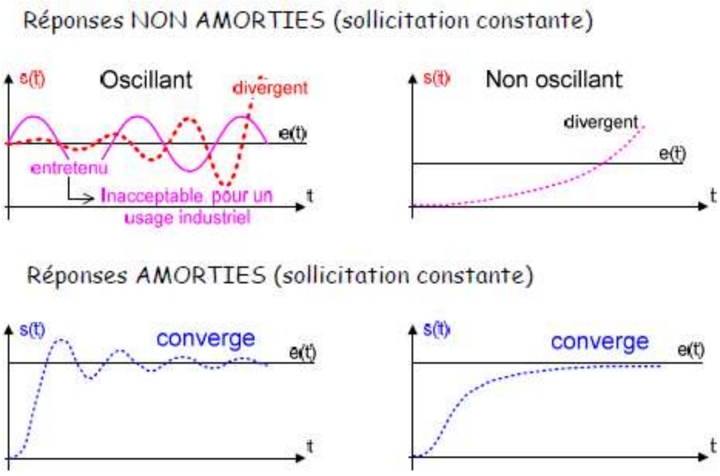



Système rapide

## Stabilité

| Un système linéaire est STABLE | ⇔ | A TOUTE ENTRÉE BORNÉE correspond une SORTIE BORNÉE, et CONVERGENTE |
|---|---|---|

Pour un système industriel, à consigne bornée et en absence de toute perturbation, la grandeur de sortie doit **converger vers une valeur constante.**




## Amortissement

La grandeur de sortie peut évoluer de manière oscillatoire.

- Si les oscillations sont trop importantes et **tardent à s'atténuer**, l'utilisateu retiendra un comportement manquant de stabilité ⇒ **inacceptable** (fig6)
- Si les oscillations n'existent plus (système très amorti), on peut perdre en rapidité (fig7)

Fig 6

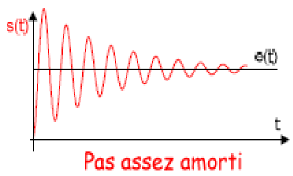
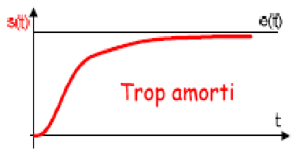
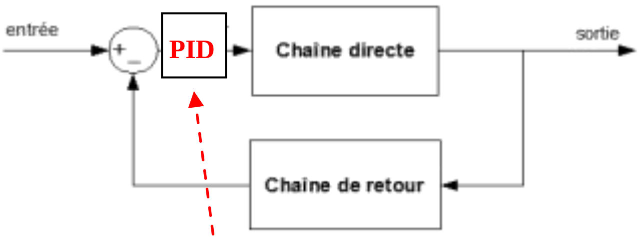



Fig 7




### 1.3. Conséquences de la boucle de retour d'un asservissement




En général, le bouclage, avec un réglage des gains bien choisi :

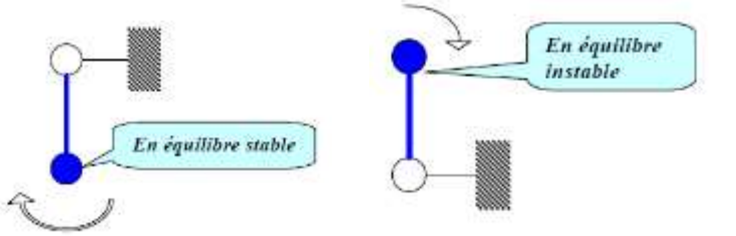
⇒ améliore : la **précision** et la **rapidité**
⇒ réduit les **perturbations**

*Mais le bouclage peut :*

⇒ ***rendre instable*** *un système qui est stable en chaîne directe*
⇒ ***stabiliser*** *un système qui est instable en chaîne directe*

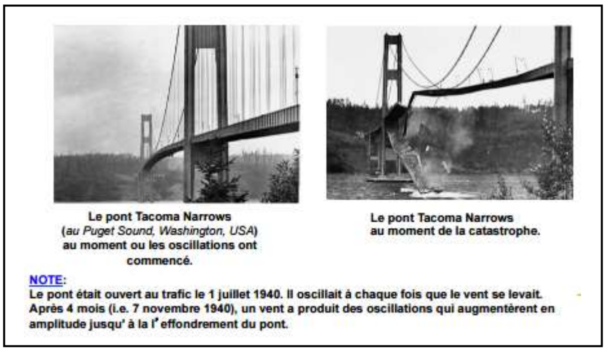
*Solution pour **améliorer** les performances* ⇐ ***CORRECTEURS PID***

## 2. Stabilité des systèmes asservis




Etudier la réponse libre d'un système, revient à **écarter le système de sa position d'équilibre** et à analyser sa réponse.

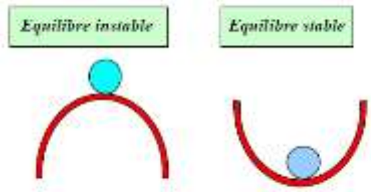
Un système stable a tendance à **revenir dans sa position d'équilibre**, un système instable a tendance à s'en écarter, un système qui ne revient pas dans sa position d'équilibre mais ne s'en écarte pas est dit juste instable.



Le pont Tacoma Narrows (au Puget Sound, Washington, USA) au moment ou les oscillations ont commencé.

Le pont Tacoma Narrows au moment de la catastrophe.

NOTE: Le pont était ouvert au trafic le 1 juillet 1940. Il oscillait à chaque fois que le vent se levait. Après 4 mois (i.e. 7 novembre 1940), un vent a produit des oscillations qui augmentèrent en amplitude jusqu' à la l' effondrement du pont.



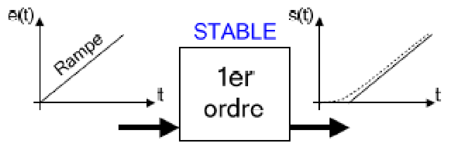

*Remarques :*

*Le fait qu'un système soit stable pour une certaine valeur de ses paramètres n'est pas suffisant pratiquement. Ainsi une faible variation de l'un des paramètres peut engendrer l'instabilité. (système linéaire continu, pas tout à fait INVARIANT)*

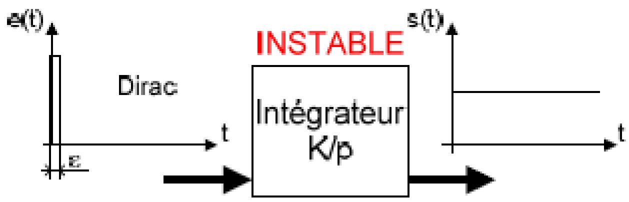
*D'où la notion de* ***MARGE de STABILITE*** *pour se tenir à l'écart des zones à risques d'instabilité, et rendre le système* ***"Robuste".***

*La stabilité est* ***indépendante de l'entrée*** *considérée*

*Ex : un système peut être stable, et sa sortie peut diverger si l'entrée diverge.*




**Ne pas confondre** système STABLE et CONVERGENCE de la sortie !!




*Ex : la sortie de l'intégrateur converge pour une entrée en Dirac mais il n'est pas stable (cf Bode)*

### 2.1. Condition nécessaire et suffisante de stabilité des systèmes linéaires

On admettra que, pour un système linéaire la **stabilité est indépendante de l'entrée** : dans l'équation différentielle représentative du système il suffit d'étudier le **régime libre**, c'est-à-dire **l'équation différentielle sans second membre** ("sans l'entrée").

Equation différentielle du régime libre : $a_n \frac{d^n s}{dt^n} + \dots + a_k \frac{d^k s}{dt^k} + \dots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 . s = 0$

La transformée de Laplace appliquée a un terme de rang k donne :

$$\mathcal{L}\left[a_k \frac{d^k s}{dt^k}\right] = a_k . \left[p^k . S(p) - p^{k-1}.s(0) - p^{k-2}.s^{(1)}(0) - \dots - p^1 . s^{(k-2)}(0) - p^0 . s^{(k-1)}(0)\right]$$

Avec Laplace l'équation différentielle devient : $[a_n . p^n + \dots + a_1 . p + a_0] . S(p) - P_0(p) = 0$ avec $P_0(p) = \sum_{i \text{ de } 0 \text{ à } n-1} [c_i . p^i]$

D'où : $S(p) = \dfrac{P_0(p)}{a_n.p^n + \ldots + a_1.p + a_0}$

C'est aussi le dénominateur de la fonction de transfert

Pour trouver tous les comportements possibles de s(t), il suffit de **décomposer S(p) en sommes d'éléments simples Si(p)** et de chercher leur transformée de Laplace inverse si(t)**.** Seules les 4 formes ci-dessous sont possibles, selon la nature des pôles de $a_n.p^n+\ldots+a_1.p+a_0$.

| Type de pôle | Elément simple $S_i(p)$ | Laplace Inverse $s_i(t)$ et Mode du système | $s_i(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ sisi : | exemple Fig 11 |
|---|---|---|---|---|
| ***Réel SIMPLE*** $a$ | $\dfrac{1}{p-a}$ | Mode ***exponentiel*** $e^{at}$ | $a<0$ | 11a |
| Réel MULTIPLE d'ordre **k** $a$ | $\dfrac{1}{(p-a)^k}$ Pôle d'ordre k | Mode ***exponentiel*** $\dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}.e^{at}$ | $a<0$ | 11b |
| Complexes conjugués SIMPLES $a \pm j.b$ | $\dfrac{\alpha.p+\beta}{(p-a)^2+b^2}$ | ***Mode oscillant*** $\lambda.\sin(\omega t+\varphi).e^{at}$ | $a<0$ | 11c |
| Complexes conjugués MULTIPLES $a \pm j.b$ | $\dfrac{\alpha.p+\beta}{[(p-a)^2+b^2]^k}$ Pôle d'ordre k | ***Mode oscillant*** $\lambda.\sin(\omega t+\varphi)\dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}.e^{at}$ | $a<0$ | 11d |

Ces pôles sont les mêmes que ceux de la Fonction de Transfert

Un système est stable si, et seulement si, la **fonction de transfert en boucle fermée n'a pas de pôle à partie réelle positive ou nulle**. La position des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée nous renseigne donc sur la stabilité de la fonction de transfert.

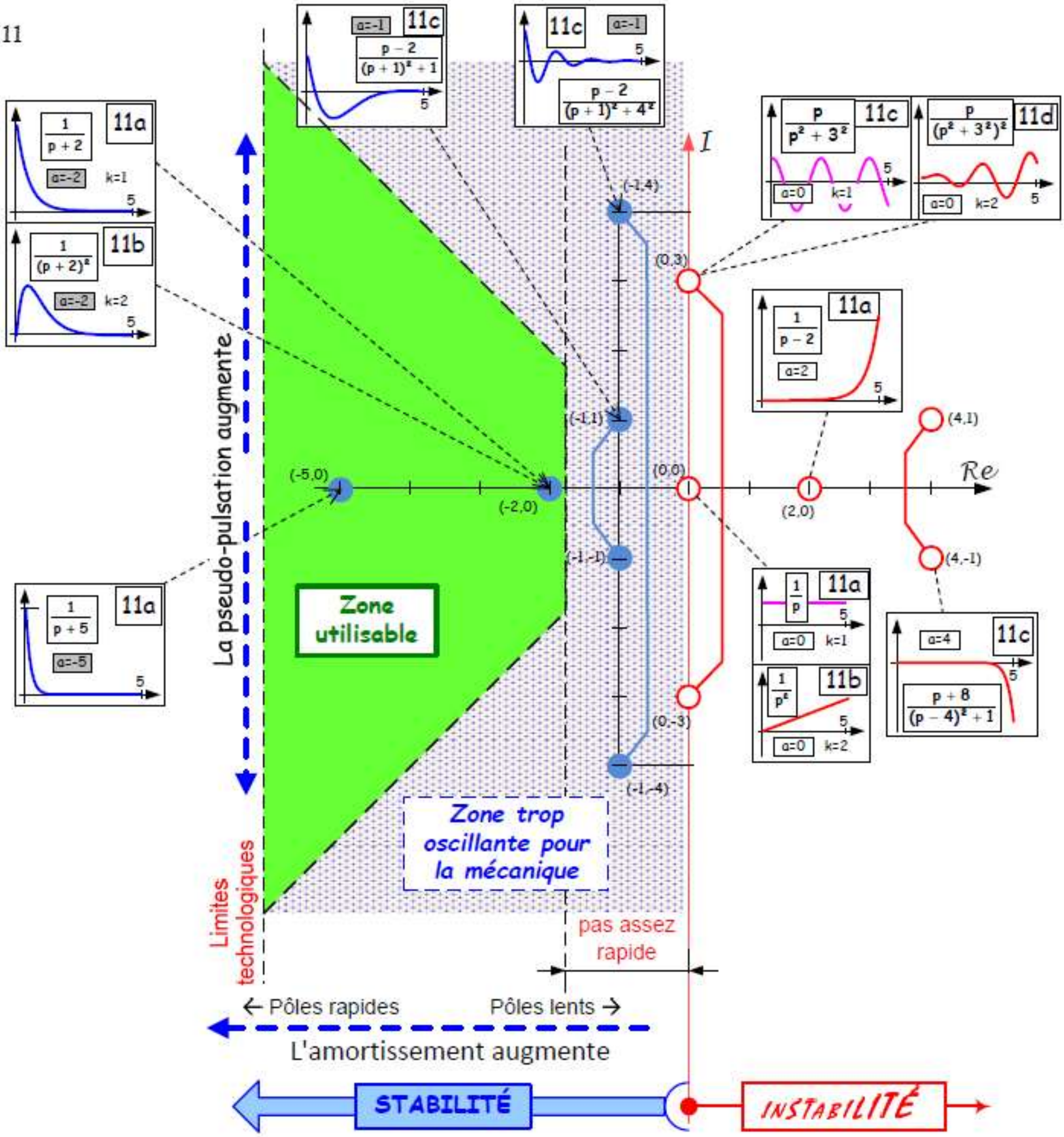
⇒ Système linéaire STABLE ⇔ Pôles de la Fonction de transfert à $\mathcal{Re} < 0$

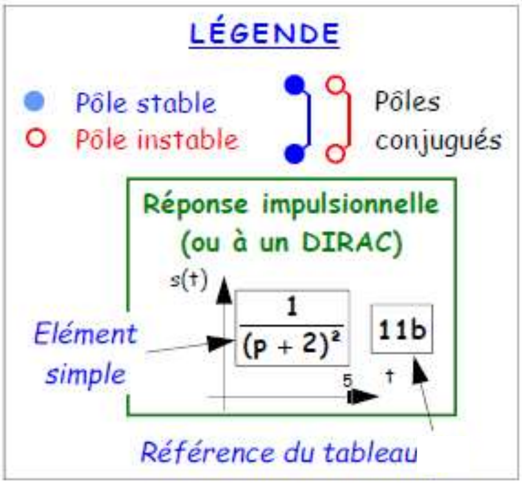
⇒ Etude de la STABILITÉ d'un Système linéaire ⇔ L'étude de la stabilité d'un système linéaire se résume à l'étude des pôles de sa fonction de transfert

2.2. Représentation des pôles dans le plan complexe et réponses impulsionnelles associées

La stabilité d'un système linéaire étant liée aux pôles de sa fonction de transfert, on peut illustrer celle-ci pour chaque type de pôle, par la réponse à un DIRAC de l'élément simple **si(t)** correspondant.
En effet, la réponse d'un système a un DIRAC est exactement sa fonction de transfert, puisque L**(Dirac) = 1**

fig 11






**Notion de pôle dominant**

On constate que les pôles dont $\mathcal{R}e \ll 0$ donnent une réponse très amortie.
Leur contribution à la réponse totale du système est donc faible.

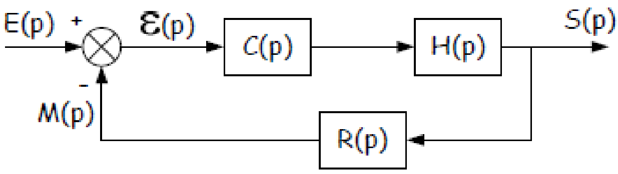
**→ Pour une modélisation approchée on retiendra les pôles les plus proches de l'axe des imaginaires (les pôles les plus lents)**

Pôle dominant = pôle le + lent
(qui nuit à la stabilité)
Le PID cherchera à l'éliminer…

2.3. Stabilité d'un système asservis – Critère algébrique

Soit la structure fonctionnelle d'un système asservi :

***H(p)*** *F.T. du procédé -* ***C(p)*** *F.T. du correcteur*
***R(p)*** *F.T. du capteur (chaine de retour)*




Condition de stabilité :

Soient : **C(p)=N1/D1 , H(p)=N2/D2 , R(p)=N3/D3**

Mettons la **FTBF** sous forme de fraction rationnelle :

$$\Rightarrow \mathbf{FTBF(p)} = \frac{\frac{N_1}{D_1}\cdot\frac{N_2}{D_2}}{1+\frac{N_1}{D_1}\cdot\frac{N_2}{D_2}\cdot\frac{N_3}{D_3}} = \frac{\text{FTCD}}{\text{1+FTBO}}$$

Le dénominateur a les mêmes racines que (1+FTBO)

**CNS de stabilité d'un asservissement :** Racines de [1 + FTBO(p)] à $\mathcal{R}e < 0$

Notion de domaine de stabilité : **→ Marges de stabilité**

Le critère **de stabilité** est un critère **ABSOLU** qui ne prend pas en compte les **écarts du modèle par rapport au système réel :**

- système non-invariant dans le temps : ex : *usure, échauffement, vieillissement,...*
- modèle approché : ex : *retards négligés*

D'où la nécessité de donner une **marge de stabilité** (***cf. coefficient de sécurité***) par rapport à la condition stricte de stabilité : c'est l'objet de l'**analyse fréquentielle** qui suit.

## 2.4. Stabilité d'un système asservis – Critère graphique – Analyse fréquentielle

Nous utiliserons les diagrammes de **Bode** du système en **BOUCLE OUVERTE** pour étudier sa **STABILITE en Boucle fermée.**

Il faut donc situer FTBO(jω) par rapport au **point -1** telle que ses pôles soient à Re<0

⇒ dans **Bode** : le point (module, argument) **= (-1, 180°)**

*Lorsque la FTBO tend vers -1, la FTBF tend vers l'infini ou la réponse devient très grande pour une petite sollicitation en entrée. Cela aboutira à une saturation ou destruction du matériel.*

La stabilité sera étudiée en déterminant la distance du lieu de transfert par rapport au point de fonctionnement

| T(jω)| = 1 et Arg (T(jω)) = - 180° appelé **point critique.**

La distance sera déterminée soit algébriquement soit graphiquement à partir de la FTBO.

### 2.4.1. Critère de ROUTH-HURWITZ

La méthode permet de savoir, en ne tenant compte que des coefficients du polynôme, s'il existe des pôles dont les parties réelles sont négatives.
On écrit le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée sous la forme d'un polynôme ordonné suivant les puissances décroissantes de s. C'est **l'équation caractéristique.**

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

On construit la première colonne et les deux premières lignes du tableau suivant en utilisant l'équation caractéristique.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $s^n$ | $a_n$ | $a_{n-2}$ | $a_{n-4}$ | … | $a_0$ |
| $s^{n-1}$ | $a_{n-1}$ | $a_{n-3}$ | $a_{n-5}$ | | $a_1$ |
| $s^{n-2}$ | $A_1$ | $A_2$ | | | |
| $s^{n-3}$ | $B_1$ | $B_2$ | | | |
| . | $C_1$ | | | | |
| . | | | | | |
| . | | | | | |
| s | | | | | |
| 1 | | | | | |

$$A_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$A_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$B_1 = \frac{A_1 a_{n-3} - A_2 a_{n-1}}{A_1} \quad \ldots.$$

*On calcule les valeurs des lignes suivantes en utilisant les expressions ci-dessus.*

Critère de ROUTH-HURWITZ :

Le système est stable **si tous les coefficients de la première colonne sont positifs**. Si ce n'est pas le cas, le nombre de changements de signe correspond au nombre de racines à partie réelle positive.

*Exemple*

$D(p) = p^4 + p^3 + 3.p^2 + p + 1$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $p^4$ | 1 | 3 | 1 |
| $p^3$ | 1 | 1 | 0 |
| $p^2$ | 2 | 1 | 0 |
| $p^1$ | 0,5 | 0 | |
| $p^0$ | 1 | | |

$b_2 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 2$ ; $b_0 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} = 1$

$c_1 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} = 0{,}5$ ; $c_{-1} = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix} = 0$

$d_0 = \frac{-1}{0{,}5}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0{,}5 & 0\end{vmatrix} = 1$

En conclusion : Système stable

2.4.1. Critère graphique du REVERS

Ce critère s'applique à l'étude de la stabilité **des systèmes bouclés**. Il est basé sur **l'étude de la position relative du lieu de transfert en boucle ouverte** et du point particulier matérialisant un module unité et un argument de - 180° dont on sait qu'il correspond à la juste instabilité. Ce point est appelé **point critique [0 dB ; -180°]**

La condition fondamentale de stabilité (les pôles de la fonction de transfert sont à partie réelle négative) se traduit graphiquement par la **règle du revers** qui s'applique dans Bode.

*On pourrait penser à priori que seul le point critique est dangereux pour la stabilité du système, mais il en est tout autrement : on peut démontrer que le point critique définit une frontière à ne pas dépasser. L'avantage des représentations graphique et donc du critère du REVERS est qu'elles permettent de mettre en place rapidement des* ***correcteurs et de voir leurs influences sur la stabilité.***

- **Critère du revers dans BODE sur la FTBO :**

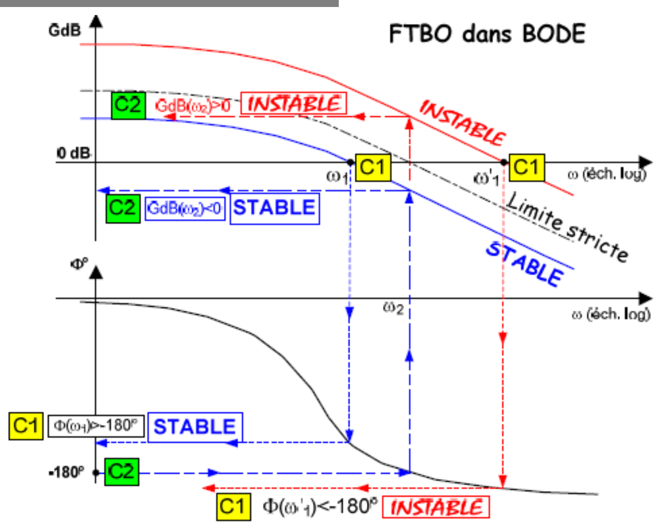
**BODE**

La Boucle Fermée est STABLE $\Leftrightarrow$

**C1**
Pour la pulsation $\omega_1$ telle que :
$20 \log |FTBO(j\omega_1)| = 0$ (ou : $|FTBO(j\omega_1)| = 1$)
Alors : $\Phi(\omega_1) = \text{Arg}[FTBO(j.\omega_1)] > -180°$

**ET**

**C2**
Pour la pulsation $\omega_2$ telle que :
$\text{Arg}[FTBO(j\omega_2)] = -180°$
Alors : $G_{dB}(\omega_2) = 20.\log|FTBO(j.\omega_2)| < 0$



### 2.4.2. MARGES de stabilité

Pour qu'un système bouclé soit stable, il faut que les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée soient à partie réelle négative. Ce qui se vérifie soit :

- *par la détermination directe des valeurs des pôles ;*
- *en utilisant le critère de Routh ;*
- *par l'utilisation de la règle graphique du revers sur le lieu de transfert de la FTBO*

Ce sont des applications du critère fondamental de stabilité.

En pratique, il est nécessaire de **faire fonctionner un système suffisamment loin de son point d'instabilité** (point critique).
En effet, un système à la limite de la stabilité est mal amorti. Son bon fonctionnement n'est pas assuré car une faible modification de ses caractéristiques peut le rendre instable.
Les lieux de transfert des systèmes réels sont obtenus par modélisation ou expérimentalement, ils ne sont donc pas connus de manière exacte.

Apprécier le degré de stabilité d'un système, c'est **quantifier son éloignement de la juste instabilité**. On définit des **marges de sécurité** se traduisant par des distances à respecter entre le lieu de transfert de la FTBO et le point critique d'affixe (-1).

Ceci est vrai même pour les systèmes du second ordre qui comme ceux du $1^{er}$ ordre sont stables par nature ($\varphi > -180°$).

Soit **$\omega_{c0}$= pulsation de coupure à 0 dB.** A ne pas confondre avec la **pulsation de cassure** des diagrammes asymptotiques

**Marge de gain**

Distance à respecter entre le point de la FTBO pour lequel la phase vaut -180° et l'amplitude du point critique.
La marge de gain couramment utilisée est de **10 à 12 dB.**

$$\mathrm{Arg}\,[T(j\omega)] = -180° \;\rightarrow\; \omega_{(-180)}$$

$$M_g = -20 \log |T(j\omega_{-180})|$$

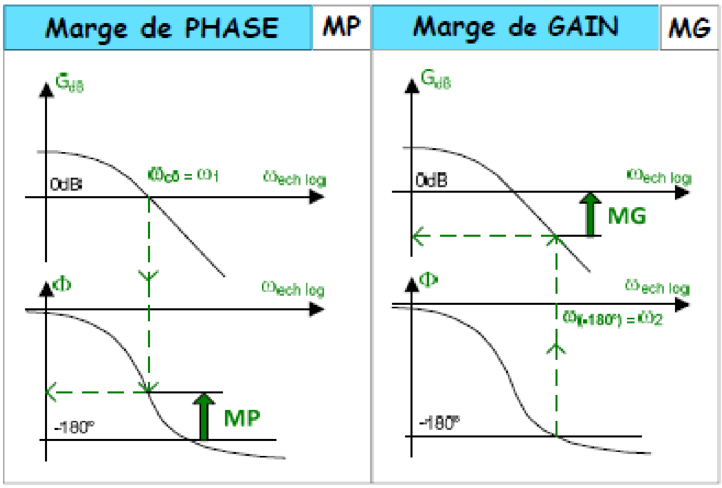
**Marge de phase**

Distance à respecter entre la phase du point de la FTBO d'amplitude 1 et la phase du point critique.
La marge de phase couramment utilisée est de 45°.

$$|T(j\omega_{c0})| = 1 \;\rightarrow\; \omega_{c0}$$

$$M_\varphi = 180 + \mathrm{Arg}\,[T(j\omega_{c0})]$$

*Un tel réglage [ Mg = 12 dB ; $M_\varphi$ = 45° ] conduit à un comportement légèrement oscillatoire en régime indiciel de position ( dépassement $\approx$ 15% ).*




En pratique on prend : **MP ≈ 45°** ou **MG ≈ 10 à 12 dB**

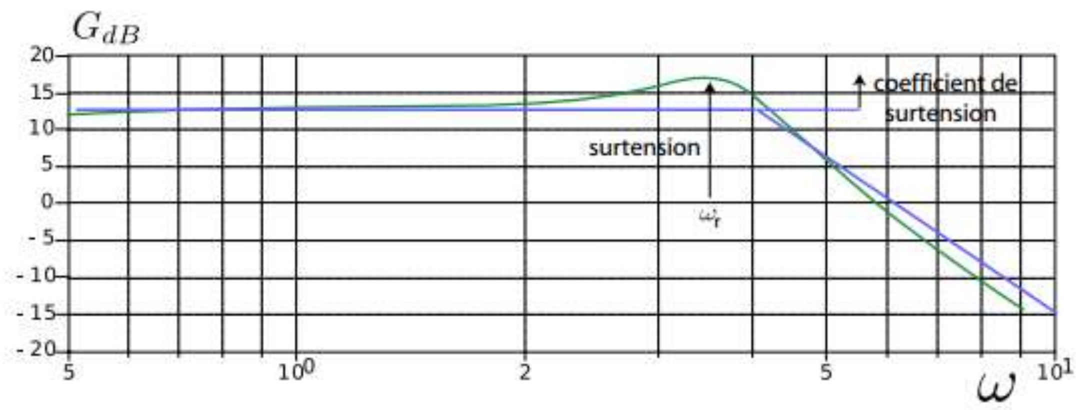
*Remarque sur la surtension et son coefficient :*

Rappel : Pour un second ordre dont $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$, la surtension (gain à la pulsation de résonance $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$) vaut :

$$G_s = 20.log\left(\frac{K}{2.\xi.\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

et le cœfficient de surtension vaut :

$$\frac{1}{2.\xi.\sqrt{1-\xi^2}}$$

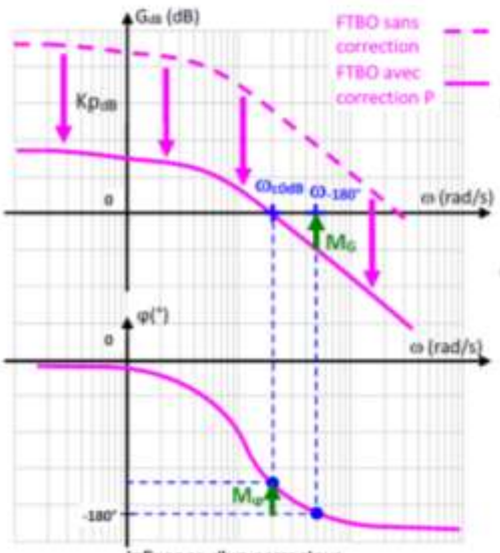


### 2.4.4. Influence du gain sur la stabilité des systèmes bouclés

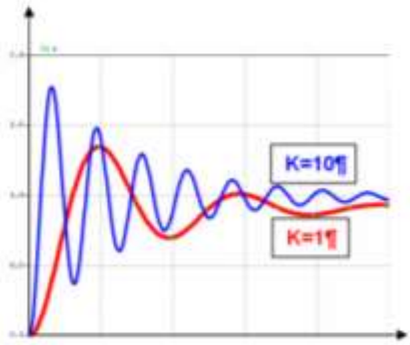
Au niveau des gains, c'est plutôt une erreur de réglage qui peut aboutir à une instabilité. Sur l'abaque de Black, toute **modification du gain se traduit par une translation verticale du gain dans BODE de la FTBO**. Une augmentation excessive de ce gain peut faire passer le lieu au-dessus du point critique, et **rendre instable le système**.

- si $K_p$ <1, la translation se fait vers le bas
- si $K_p$ >1, la translation se fait vers le haut

Donc si Kp >1 : le système est
- plus rapide
- plus précis
- moins stable



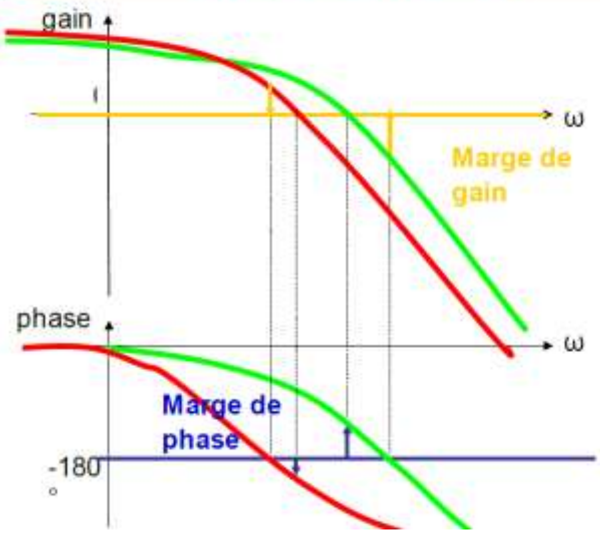

Influence d'un correcteur proportionnel sur le diagramme de Bode




Réponse temporelle

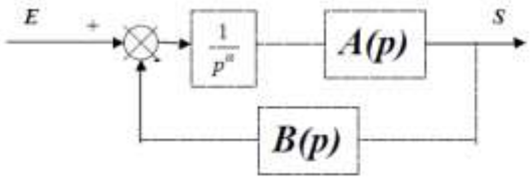
### 2.4.5. Influence des constantes de temps sur la stabilité des systèmes bouclés

L'augmentation de la constante de temps provoque un retard supplémentaire susceptible de provoquer l'instabilité en boucle fermée.



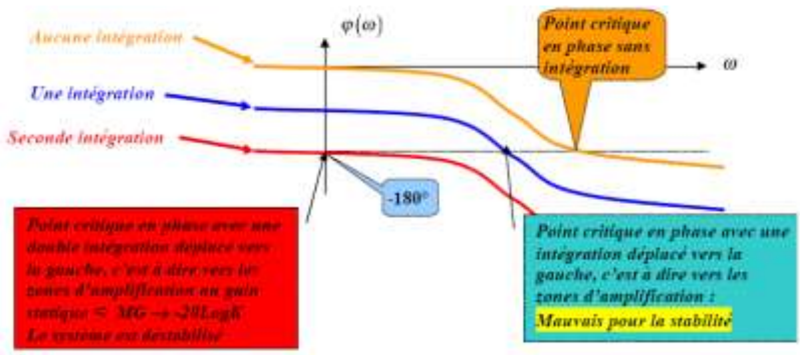
### 2.4.6. Influence de l'intégration sur la stabilité des systèmes bouclés

On considère le système bouclé classique avec une correction intégrale dans la boucle ouverte suivant :




$$FTBO = \frac{1}{p^{\alpha}} A(p) B(p)$$

L'influence de l'action intégrale est très simple sur les courbes de phase des diagrammes de Bode. En effet la phase d'un intégrateur est constante et vaut **-90°.** Donc les courbes de Bode sont **translatées de -90° vers le bas à chaque fois que l'on rajoute un intégrateur.**



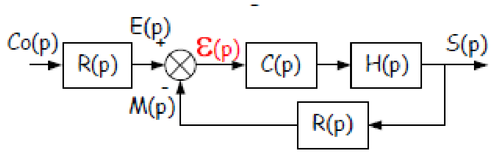

Attention, on verra dans le chapitre suivant que les intégrateurs sont indispensables pour assurer une **bonne précision** : les objectifs de stabilité et de précision sont antagonistes.

## 3. Précision des systèmes asservis

La précision en régime permanent est caractérisée par la différence entre la valeur visée (consigne) et la valeur atteinte (sortie).

### 3.1. Notion d'erreur et d'écart

**L'ERREUR** d'un asservissement est la différence à l'instant t, **entre la sortie voulue et la sortie réelle obtenue.**



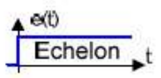

*Les grandeurs entrée et sortie doivent être homogènes !*

L'ÉCART ε(p) est le reflet exact de "l'erreur", lorsque le retour **R(p)** est unitaire (**M(p)=S(p)**).
Ce qui conduit à utiliser l'écart ε(p)=**E(p)-M(p)** comme **grandeur image de la précision**.

Ecart de "..."
$= \lim_{t \to \infty} \varepsilon(t)$
$= \lim_{p \to 0} p.\varepsilon(p)$

(Théorème de la valeur finale)

Selon l'entrée, l'écart est dit :




de **POSITION**


de **POURSUITE**


en **ACCELERATION**

*Le problème de l'écart nul :*

- *Si l'entrée e(t) est dynamique, il faut résoudre un problème de « poursuite », la correction de la sortie se faisant avec un certain retard.*
- *Dans le cas d'une entrée constante, si des perturbations se superposent aux signaux, dans la BO, il faut résoudre un porblème de « régulation ».*
- *Dans un système asservis, l'écart est utilisé, amplifié, pour assurer la commande du système. S'il est nul, il n'y a plus d'énergie !!*

## 3.2. Expression de l'écart dans Laplace

$\varepsilon(p) = E(p) - M(p) = E(p) - \varepsilon(p).FTBO(p)$ D'où : $\varepsilon(p) = \dfrac{E(p)}{1+FTBO(p)}$

l'Ecart est donc fonction : de l'entrée et de la FTBO

## 3.3. Notion de classe d'un système asservi

Quel que soit le système asservi linéaire , la **FTBO** peut se mettre sous la forme :

$$FTBO(p) = \frac{K}{p^{\alpha}} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}$$

K = Gain STATIQUE (ou Gain de BO)

$N(p) = 1+b_1.p+...+b_m.p^m$

$D(p) = 1+a_1.p+...+a_n.p^n$

$N(0) = 1$ $D(0) = 1$

Avec : $(\alpha + n) \geq m$

$\alpha \in \mathbb{N}$

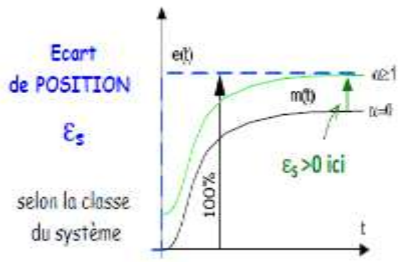
$\alpha$ = CLASSE du système (en BF)

## 3.4. Ecart en régime permanent – notion de précision

$\varepsilon(p)$ devient : $\varepsilon(p) = \dfrac{p^{\alpha}.D(p).E(p)}{p^{\alpha}.D(p)+K.N(p)}$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon(\infty) = \lim_{p\to 0} p.\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} \frac{p^{\alpha+1}.E(p)}{p^{\alpha}+K}$$

*Cette mise en forme de la **FTBO** permet d'analyser plus facilement la limite, e(∞) au moyen du théorème de la valeur finale (ci-dessous)*



## 3.5. Précision pour une entrée en ECHELON

Soit l'entrée en échelon : $e(t) = e_0.u(t) \Rightarrow E(p) = e_0/p$

**Ecart de POSITION $\varepsilon_s$**

$$\varepsilon_S = \varepsilon(\infty) = \lim_{p \to 0} \frac{e_0.p^\alpha}{p^\alpha + K}$$

| Classe = 0 | Classe ≥ 1 |
|---|---|
| $\varepsilon_S = \frac{e_0}{1+K}$ | $\varepsilon_S = 0$ |
| 1° $\varepsilon_S$ ↘ quand K (gain de BO) ↗<br>2° $\varepsilon_S$ ↘ quand $e_0$ (amplitude échelon) ↘ | Au moins un intégrateur dans la BO ⇒ Ecart de position NUL |

## 3.6. Précision pour une entrée en RAMPE

Soit l'entrée en Rampe : $e(t) = r_0.t.u(t) \Rightarrow E(p) = r_0/p^2$

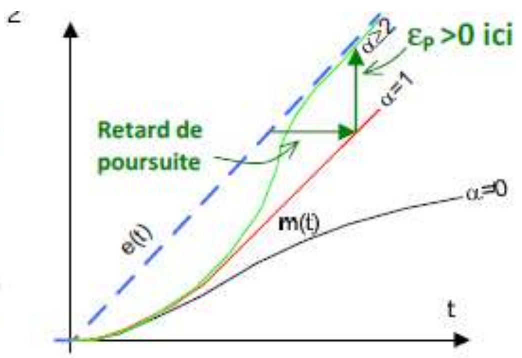
**Ecart de POURSUITE $\varepsilon_p$**

$$\Rightarrow \varepsilon_P = \varepsilon(\infty) = \lim_{p \to 0} \frac{r_0.p^{\alpha-1}}{p^\alpha + K}$$

| Classe = 0 | Classe = 1 | Classe ≥ 2 |
|---|---|---|
| $\varepsilon_P = +\infty$ | $\varepsilon_P = \frac{r_0}{K}$ | $\varepsilon_P = 0$ |
| Aucun intégrateur dans la BO ⇒ Ecart de poursuite DIVERGE | 1 intégrateur dans la BO<br>1° $\varepsilon_P$ ↘ quand K ↗<br>2° $\varepsilon_P$ ↘ quand $r_0$ (pente rampe) ↗ | Au moins 2 intégrateurs dans la BO ⇒ Ecart de poursuite NUL |

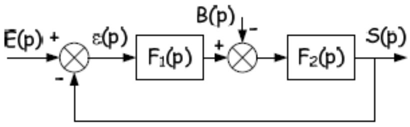
Ecart de POURSUITE $\varepsilon_p$

selon la classe du système



### 3.7. Influence d'une perturbation sur la précision d'un système asservi

Le problème peut vite devenir complexe compte tenu des multiples situations réelles possibles. Aussi, nous n'étudierons ici qu'un cas particulier, avec une seule **perturbation**, constante, au milieu de la chaine directe.




$\varepsilon(p) = E(p) - F_2(p).[\varepsilon(p).F_1(p) - B(p)]$

$E(p) - \varepsilon(p).F_1(p).F_2(p) + B(p).F_2(p)$

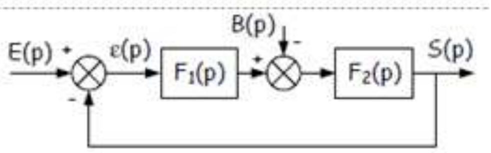
$$\varepsilon(p) = \frac{E}{1+F_1.F_2} + \frac{B.F_2}{1+F_1.F_2} = \varepsilon_{entrée} + \varepsilon_{pert}$$

On admettra la conclusion suivante :

| | |
|---|---|
| **Perturbation échelon et Précision de Position**<br>Importance de l'**AMONT de la Perturbation** : | 1° $\varepsilon_{S\,pert}$ ↘ quand le gain en AMONT de la pert. ↗<br>2° $\varepsilon_{S\,pert} = 0$ si au moins 1 intégrateur en AMONT pert. |
| **Perturbations : Cas général** | Au moins 1 intégrateur en AMONT de la perturbation "rejette" la perturbation, ou atténue son effet néfaste sur la précision |

☺ *Remarque : influence d'une perturbation sur la stabilité*

Pour une telle structure de schéma bloc on applique le théorème de superposition :




$$S(p) = E(p)\frac{F_1(p).F_2(p)}{1+F_1(p).F_2(p)} - B(p)\frac{F_2(p)}{1+F_1(p).F_2(p)}$$

Dans l'expression de **S(p)** les fonctions "sans perturbation" et "avec perturbation" ont le même dénominateur. D'où la propriété suivante :

| | |
|---|---|
| **Perturbation additive et Stabilité** | L'étude de la stabilité d'un système perturbé peut se faire sans l'entrée perturbation |

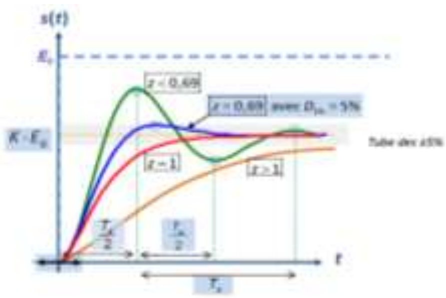
## 4. Etude du régime transitoire : amortissement et rapidité

Les principales qualités exigées d'un régime transitoire sont la **rapidité** et **l'amortissement**.

### 4.1. Amortissement

On caractérise le niveau d'amortissement d'un système en régime transitoire en étudiant sa **Réponse à un échelon** au niveau du **1er dépassement D1**. Ce dépassement est fonction d'un certain nombre de paramètres :

*Ex : pour un **2e ordre**, le facteur d'amortissement **z** (ou **m**), est **le seul paramètre** permettant de quantifier **D1**.(cf cours PTSI)*



## 4.2. Rapidité : temps de réponse et bande passante

La rapidité est une notion **globale.**
Il existe plusieurs critères de rapidité, qui s'appliquent chacun a un type d'entrée.

- ***Pour la réponse à un échelon*** *:*
  Le critère standard de rapidité est le **temps de réponse à 5%** et/ou **le temps de montée**, qui renseignent directement sur la durée du transitoire.
  Si le système est oscillant, on peut avoir une vague idée de la rapidité avec la valeur de la **pseudo-periode (Tp)**

- ***Pour une réponse harmonique :***
  On définit la **bande passante** : elle permet de dire à quelles zones de fréquences d'entrée le système est capable de répondre valablement.

## 4.3. Notion de bande passante

Les systèmes mécaniques sont des **filtres passe-bas**. C'est à dire qu'au-delà de certaines valeurs de fréquence du signal d'entrée, le signal de sortie est fortement attenué, ou même n'existe plus (quelques Hz a quelques dizaines d'Hz).

*Par exemple : Un système à forte inertie ne réagit plus à une sollicitation de fréquence même peu élevée.*

Pour les systèmes étudies en S.I. la bande passante commence toujours à $\omega$ **proche de 0**. La bande passante se résume donc à **la donnée d'une borne supérieure de la pulsation** $\omega$, au-delà de laquelle le système ne suit plus l'entrée.

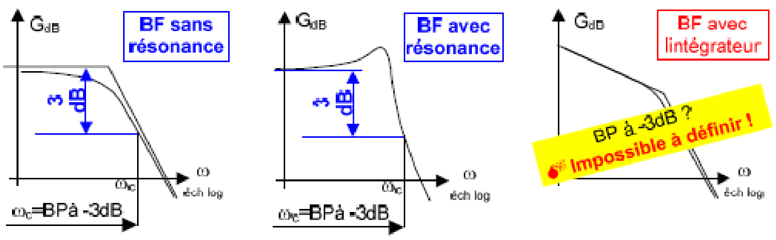
**Bande Passante à - $\lambda$ dB BP(-$\lambda$dB)**

C'est la bande de pulsations, telle que $\forall\ \omega \le \omega_c$ ($\omega_c$ appelée **pulsation de coupure**)

$$G_{dB}[FTBF(0)] - G_{dB}[FTBF(\omega)] \le \lambda \text{ dB}$$

*Ex : Estimation de la **BP (-3 DB) en BF**, pour K grand :*

*Si : $\omega_{c0}$ = pulsation de **COUPURE à 0dB** de la **FTBO**, alors pour la FTBF :*
***$BP_{BF}$ (-3dB) ~ $\omega_{c0}$ (BO)***



<u>Synthèse sur les performances et relation avec les constantes de temps :</u>

*Rappel : w = 1/T, et plus T est petit en BF, meilleure est la rapidité.*

1°) Pour améliorer la **STABILITE** → élimine le pôle le plus lent = proche axe imaginaire = cte temps la plus grande (qui est aussi le moins stable)

2°) Pour améliorer la **RAPIDITE** → élimine le pôle le plus lent (constante de temps la plus grande)

3°) **Pôle dominant** : C'est le pôle le plus lent. Celui-ci nuit à la stabilité.
→ il sera éliminé par un correcteur adapté.

fig 11