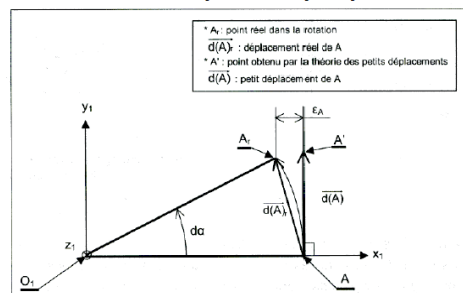


Cycle 4: Etudier et modéliser les solides déformables

Chapitre 1 : Torseur des petits déplacements



Problématique

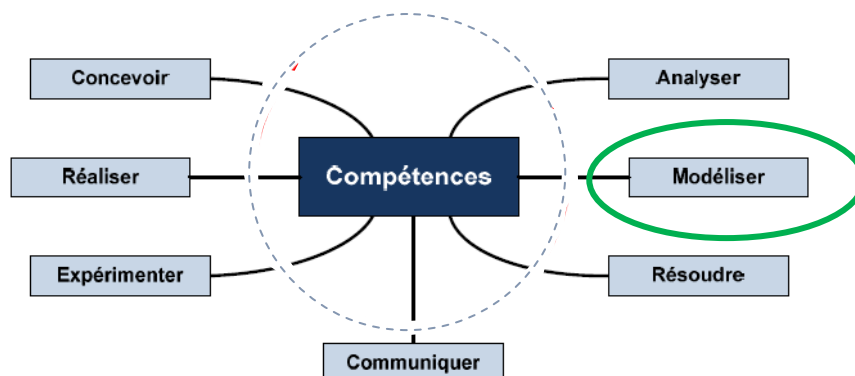
Le concept de torseur de petit déplacement a été développé dans les années 70. Initialement utilisé en métrologie afin d'associer une surface quelconque à un nuage de points, ce concept s'est élargi à de nombreux domaines (mesure 3D MMT, simulation cinématique et dynamique...).

Il permet de définir en tout point M d'un corps rigide un petit déplacement. Le **champ des déplacements des points liés à un solide** peut être considéré comme un **champ de vecteurs** si le déplacement du solide est supposé de **faible amplitude**.

Savoir

B. Modéliser:

- Ecrire le torseur des petits déplacements et le torseur des déformations au centre d'inertie d'une section droite
- Mettre en application l'hypothèse de Navier-Bernoulli

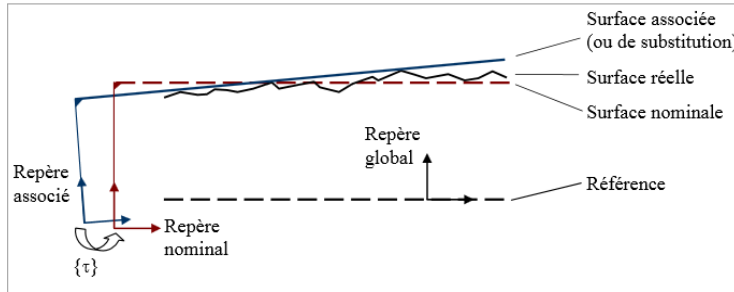




Torseur des petits déplacements

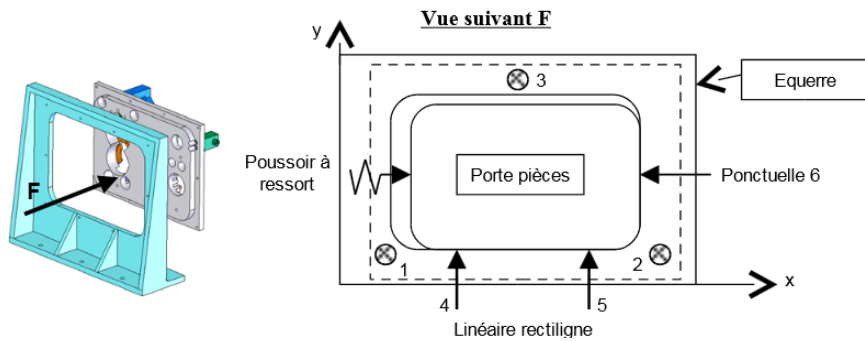
Métrologie:

- pour définir les surfaces associées aux surfaces réelles afin d'en évaluer les défauts de forme ou de position.



Fabrication:

- pour évaluer les défauts de remise en position d'une pièce dans son porte-pièce.



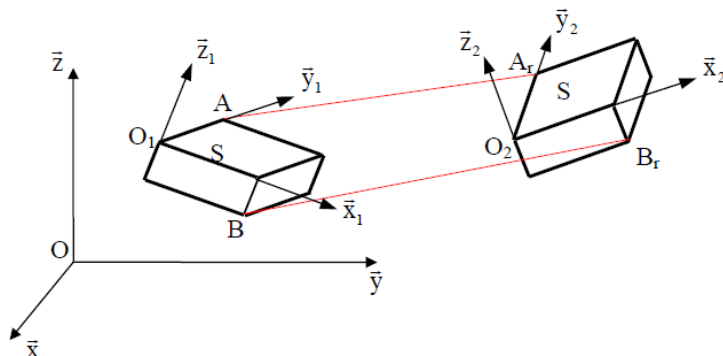
1. Déplacement d'un point d'un solide

Considérons un solide S en mouvement par rapport à un repère R et les deux positions voisines de ce solide aux dates t_1 et $t_2 = t_1 + dt$ caractérisées par les repères R_1 et R_2 .

L'objectif est de déterminer le vecteur déplacement $\overline{AA_r}$ dans le repère R_1 .

Comme $\overline{AA_r} = \overline{AO_1} + \overline{O_1A_r}$ et que les coordonnées du vecteur $\overline{AO_1}$ exprimées dans la base R_1 sont constantes, le problème revient à déterminer les coordonnées du vecteur $\overline{O_1A_r}$ dans la base R_1 .

Remarque : $\overline{AA_r} \neq \overline{BB_r}$ si le mouvement est quelconque.





Torseur des petits déplacements

Le déplacement entre les deux instants t_1 et $t_2 = t_1 + dt$ s'effectue avec six degrés de liberté :

- ✓ 3 degrés de liberté en translation caractérisés par le vecteur $\overline{O_1O_2}$
- ✓ 3 degrés de liberté en rotation que l'on peut caractériser par trois angles (angles d'Euler par exemple)

La détermination du vecteur $\overline{O_1A_r}$ dans la base R_1 nécessite de définir la matrice de passage de la base R_1 à la base R_2 qui est le produit de trois matrices liées à des rotations autour d'axes distincts dans le cas d'un mouvement quelconque.

On va donc chercher à simplifier ces calculs.

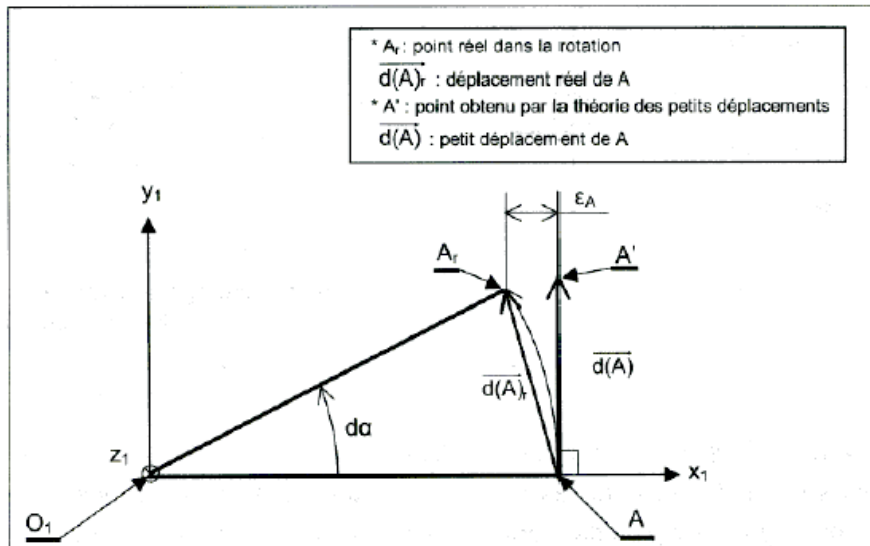
2. Principe de simplification

Prenons la notation suivante pour caractériser notre petit déplacement:



- $\vec{d}(A \in S / R_1)$: le déplacement d'un point quelconque A du solide S, lorsqu'il est petit
- $\vec{d}(\alpha \in S / R_1)$: l'angle de rotation du solide S par rapport à R_1 , lorsque cette rotation d'angle α est de faible amplitude

Prenons le cas du solide S en mouvement de rotation autour de l'axe O_1 :



Le point A du solide S en rotation d'axe (O_1, \vec{z}_1) décrit un arc de cercle dans le plan $(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

Après rotation, A se trouve en A_r , point réel : $\vec{d}(A \in S / R_1) = \overline{AA_r}$.

Avec $AA_r = 2.O_1A \cdot \sin\left(\frac{d\alpha}{2}\right)$, longueur de la corde.

Lorsque la rotation est de faible amplitude, un développement limité à l'ordre 1 donne :

$$\sin\left(\frac{d\alpha}{2}\right) \approx \frac{d\alpha}{2}, \text{ alors } AA_r = O_1A \cdot d\alpha.$$

Donc, cela revient à **confondre les longueurs de l'arc et de la corde**.



Torseur des petits déplacements

On considèrera, de plus, que les petites rotations autour d'un point fixe engendrent des déplacements orthogonaux au rayon et que le point final n'est donc pas A_r mais A' . Cela revient à négliger ε_A qui est du second ordre.

La conséquence de ces approximations est que l'on peut écrire la relation vectorielle suivante :



$$\vec{d}(A \in S / R_1) = \overrightarrow{AO_1} \wedge \vec{d}\alpha(S / R_1)$$

3. Torseur des petits déplacements

En considérant le résultat précédent nous pouvons écrire :

- Pour un point A : $\vec{d}(A \in S / R_1) = A\vec{O}_1 \wedge \vec{d}\alpha(S / R_1)$ (1)

- Pour un point B : $\vec{d}(B \in S / R_1) = B\vec{O}_1 \wedge \vec{d}\alpha(S / R_1)$ (2)

La différence membre à membre de (1) et (2) donne la relation suivante :



$$\vec{d}(A \in S / R_1) = \vec{d}(B \in S / R_1) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{d}\alpha(S / R_1)$$

L'angle de rotation étant un invariant dans le mouvement du solide S par rapport au repère R_1 (*tous les points tournent du même angle*) et les déplacements se déduisant les uns des autres par une relation du type moment, l'ensemble des deux vecteurs, rotation et petit déplacement, constituent un torseur **dit torseur des petits déplacements noté $\{D(S/R_1)\}$** .

Ce torseur s'exprime à des niveaux de précision différents selon le problème posé :

✓ **Forme vectorielle :**

$$\{D(S / R_1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{d}\alpha(S / R_1) \\ \vec{d}(M \in S / R_1) \end{array} \right\}_{M, R_1}$$

$\vec{d}\alpha(S / R_1)$: Résultante du torseur, angle de rotation de petite amplitude du solide S par rapport au repère R_1 ;

$\vec{d}(M \in S / R_1)$: Moment du torseur, petit déplacement du point M appartenant au solide S par rapport au repère R_1 .

✓ **Forme « composantes » :**

$$\{D(S / R_1)\} = \left\{ \begin{array}{ll} d\alpha_x & dM_x \\ d\alpha_y & dM_y \\ d\alpha_z & dM_z \end{array} \right\}_{M, R_1}$$



Torseur des petits déplacements

Remarque :

Considérons un solide S en mouvement par rapport à R_1 et deux positions voisines définies par les dates t_1 et $t_2 = t_1 + dt$. Le mouvement de S dans R_1 est caractérisé par son torseur cinématique :

$$\left\{ \nu(S / R_1) \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(S / R_1) \\ \vec{V}(A \in S / R_1) \end{array} \right\}_A \Rightarrow \vec{V}(B \in S / R_1) = \vec{V}(A \in S / R_1) + B\vec{A} \wedge \vec{\Omega}(S / R_1)$$

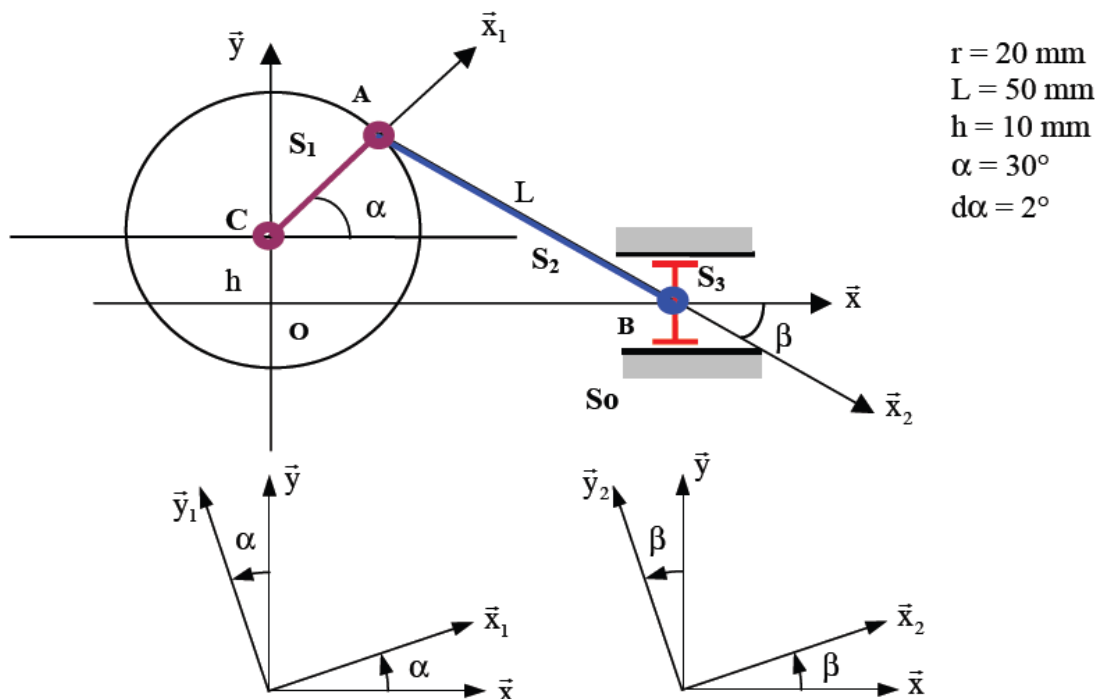
On peut aussi écrire: $\vec{V}(B \in S / R_1).dt = \vec{V}(A \in S / R_1).dt + B\vec{A} \wedge \vec{\Omega}(S / R_1).dt$

Donc dans le cas de petits déplacements, on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{d}(A \in S / R_1) = \vec{V}(A \in S / R_1).dt \\ d\alpha(S / R_1) = \vec{\Omega}(S / R_1).dt \end{array} \right.$$

4. Applications

Exemple 1: étude d'un mécanisme (système bielle-manivelle)



- $r = 20 \text{ mm}$
- $L = 50 \text{ mm}$
- $h = 10 \text{ mm}$
- $\alpha = 30^\circ$
- $d\alpha = 2^\circ$

Problème: Déterminer le petit déplacement du point B lorsque S_1 tourne d'un angle $d\alpha$ à partir d'une position α donnée.



Torseur des petits déplacements

Déterminons d'abord la vitesse du point $B \in S_3$ par rapport à R :

$$\vec{V}_{(B \in S_3 / R)} = \vec{V}_{(B \in S_3 / S_2)} + \vec{V}_{(B \in S_2 / R)} = \vec{V}_{(B \in S_2 / R)}$$

$$\vec{V}_{(B \in S_2 / R)} = \vec{V}_{(A \in S_2 / R)} + \overline{BA} \wedge \vec{\Omega}_{(S_2 / R)}$$

$$\vec{V}_{(A \in S_2 / R)} = r \dot{\alpha} \vec{y}_1 \Rightarrow V_{(B \in S_3 / R)} = r \dot{\alpha} \vec{y}_1 + L \dot{\beta} \vec{y}_2 \quad (1)$$

A partir de l'équation (1), on peut écrire :

$$\vec{V}(B \in S_3 / R) \cdot dt = r \dot{\alpha} \vec{y}_1 \cdot dt + L \dot{\beta} \vec{y}_2 \cdot dt$$

$$\Rightarrow \vec{d}(B \in S_3 / R) = r d\alpha \vec{y}_1 + L d\beta \vec{y}_2$$

$$\Rightarrow \vec{d}(B \in S_3 / R) \cdot \vec{x} = dx = -r d\alpha \sin \alpha - L \sin \beta d\beta \quad (3)$$

On déduit de (3) et (4) $dx = -r d\alpha \sin \alpha - L \sin \beta d\beta \Rightarrow dx = -r d\alpha \sin \alpha + L \sin \beta \frac{r \cos \alpha d\alpha}{L \cos \beta}$

$$dx = r [\cos \alpha \cdot \tan \beta - \sin \alpha] d\alpha$$

Application numérique : $\beta = -23,58^\circ \quad dx = -0,61 \text{ mm}$

Déterminons la relation entre α et β :

$$\overline{OC} + \overline{CA} + \overline{AB} + \overline{BO} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow h\vec{y} + r \vec{x}_1 + L \vec{x}_2 + \overline{BO} \vec{x} = \vec{0}$$

En projection sur \vec{y} :

$$h + r \sin \alpha + L \sin \beta + 0 = 0$$

$$\Rightarrow \sin \beta = -\frac{h + r \sin \alpha}{L} \quad (2)$$

L'équation (2) donne :

$$\cos \beta \frac{d\beta}{dt} = -\frac{r}{L} \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} \Rightarrow d\beta = -\frac{r \cos \alpha d\alpha}{L \cos \beta} \quad (4)$$

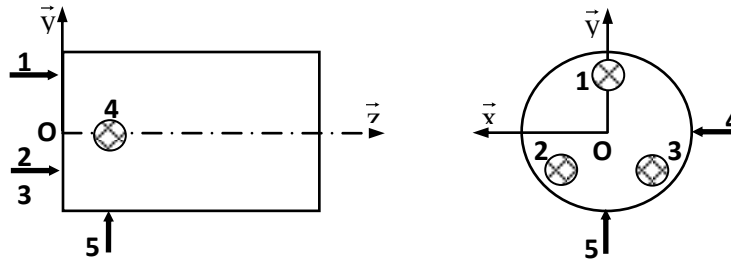
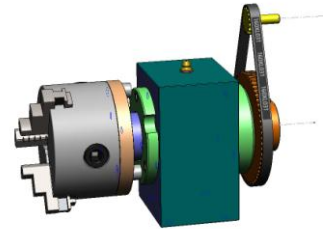
Torseur des petits déplacements

Exemple 2: étude de fabrication

La pièce à usiner est liée temporairement à la broche du tour grâce à un mandrin à 3 mors à serrage concentrique. Le maintien en position est obtenu par **adhérence** et résulte du serrage des mors.

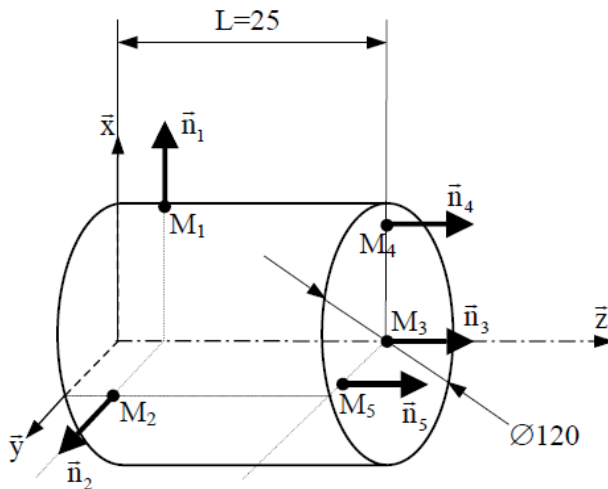
La mise en position est obtenue par :

- ✓ Un contact de la partie plane de la pièce sur le fond des mors caractérisé par les trois normales de repérage 1, 2 et 3. (Appui plan : 3 degrés de liberté éliminés : une translation suivant (O, \vec{z}) et deux rotations suivant (O, \vec{x}) et (O, \vec{y})) ;
- ✓ Un contact de la partie cylindrique de la pièce avec chacun des 3 mors sur la longueur des mors qui est très inférieure au diamètre de la pièce, caractérisé par les deux normales de repérage 4 et 5. (Centrage court : 2 degrés de liberté éliminés : deux translations suivant (O, \vec{x}) et (O, \vec{y})) ;
- ✓ Le dernier degré de liberté, la rotation de la pièce suivant (O, \vec{z}) , est éliminé par adhérence grâce au serrage des mors.



On peut caractériser la **précision de la mise en position** en déterminant les **petits déplacements possibles de la pièce à usiner par rapport au mandrin entre deux montages successifs** de la pièce dans le mandrin à serrage concentrique.

On mesure les **écarts « ϵ_i » suivant la normale** à la surface de la pièce à usiner en plusieurs points (voir schéma ci-dessous) et on en déduit le torseur des petits déplacements qui nous permettra de connaître les déplacements possibles de la pièce en tous points de celle-ci.



| | | | |
|-------|----|-------------|---|
| M_1 | 60 | \vec{n}_1 | 1 |
| | 0 | | 0 |
| | 5 | | 0 |
| M_2 | 0 | \vec{n}_2 | 0 |
| | 60 | | 1 |
| | 5 | | 0 |
| M_3 | 0 | \vec{n}_3 | 0 |
| | 0 | | 0 |
| | 25 | | 1 |
| M_4 | 55 | \vec{n}_4 | 0 |
| | 0 | | 0 |
| | 25 | | 1 |
| M_5 | 0 | \vec{n}_5 | 0 |
| | 55 | | 0 |
| | 25 | | 1 |



Torseur des petits déplacements

Le torseur des petits déplacements réduit au point O à la forme suivante :

$$\{D(S/R)\} = \left\{ \begin{array}{cc} d\alpha_x & dOx \\ d\alpha_y & dOy \\ 0 & dOz \end{array} \right\}_{O,R}$$

$d\alpha_x$ et $d\alpha_y$ défauts angulaires caractérisant l'inclinaison de l'axe de la pièce par rapport à l'axe (O, \vec{z}) du mandrin.
 dOx et dOy permettent de déterminer le défaut de concentricité dans le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) : $\sqrt{dOx^2 + dOy^2}$
 dOz défaut de mise en position axiale

Résolution:

Le torseur des petits déplacements comporte 5 inconnues, pour le déterminer il faut 5 équations obtenues à partir de 5 mesures. Soit ε_i l'écart mesuré au point M_i suivant la normale \vec{n}_i .

$$\begin{aligned} \vec{d}(M_i \in P/R) &= \vec{d}(O \in P/R) + \overrightarrow{M_i O} \wedge \vec{d}\alpha(P/R) \\ \Rightarrow \vec{d}(M_i \in P/R) \cdot \vec{n}_i &= \vec{d}(O \in P/R) \cdot \vec{n}_i + (\overrightarrow{M_i O} \wedge \vec{d}\alpha(P/R)) \cdot \vec{n}_i \\ \Rightarrow \varepsilon_i &= \vec{d}(O \in P/R) \cdot \vec{n}_i - (\overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{d}\alpha(P/R)) \cdot \vec{n}_i \end{aligned}$$

Pour le point M_1 , on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot [(60\vec{x} + 5\vec{z}) \wedge (d\alpha_x \vec{x} + d\alpha_y \vec{y})] - dx &= -\varepsilon_1 \\ 5d\alpha_y + dx &= \varepsilon_1 \end{aligned}$$

Pour les autres points, on obtient :

$$\begin{aligned} -5d\alpha_x + dy &= \varepsilon_2 \\ dz &= \varepsilon_3 \\ -55d\alpha_y + dz &= \varepsilon_4 \\ 55d\alpha_x + dz &= \varepsilon_5 \end{aligned}$$

La résolution de ce système d'équations donne les éléments de réduction du torseur des petits déplacements :

$$\{D(P/R)\} = \left\{ \begin{array}{cc} d\alpha_x = \frac{\varepsilon_5 - \varepsilon_3}{55} & dOx = \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_4}{55} \\ d\alpha_y = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_4}{55} & dOy = \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_5 - \varepsilon_3}{11} \\ 0 & dOz = \varepsilon_3 \end{array} \right\}_{O,R}$$