

Banque PT SI A 2016

Système EOS - Corrigé

Question 1/

Pour avoir une hauteur de scan utile de $C = 150 \text{ cm}$ et une résolution nécessaire pour la reconstruction de $p_x = 250 \mu\text{m}$, le nombre de lignes de pixels N_{lignes} vaut :

$$N_{lignes} = \frac{C}{p_x} = \frac{150 \cdot 10^{-2}}{250 \cdot 10^{-6}} = \frac{3}{5} \cdot 10^4 = 600 \text{ lignes}$$

Question 2/

La vitesse V_{max} vaut $V_{max} = \frac{p_x}{\tau_x} = \frac{250 \cdot 10^{-6}}{2,50 \cdot 10^{-3}} = 0,1 \text{ m/s}$

La vitesse V_{optim} vaut $V_{optim} = \frac{V_{max}}{4} = 0,025 \text{ m/s}$

Pour le dimensionnement de la motorisation du bras, il faut évidemment tenir compte de la vitesse la plus grande, ici V_{max} .

Question 3/

La durée Δt d'un scan pour la vitesse la plus lente vaut :

$$\Delta t = \frac{C}{V_{optim}} = \frac{0,15 \times 10}{2,50 \cdot 10^{-3}} = 60 \text{ s}$$

Cette durée est raisonnable pour la tenue d'une position correspondant aux situations de la vie courante.

Question 4/

Si on assimile le comportement temporel de l'ensemble du système de motorisation à une fonction de transfert du premier ordre de constante de temps τ , la durée pour atteindre 99% de la vitesse V_{max} en ayant parcouru la distance $d = 10 \text{ cm}$ vaut 5τ .

Dans ce cas :

$$d = \int_0^{5\tau} V_{max} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) dt$$

D'où

$$d = V_{max} [5\tau + \tau (e^{-5} - 1)] \approx V_{max} 4\tau$$

Et

$$\tau = \frac{d}{4V_{max}} = \frac{0,1}{4 \times 0,1} = 0,25 \text{ s}$$

Le temps de réponse à 5%, $t_{R5\%}$, vaut $t_{R5\%} = 3\tau = 0,75 \text{ s}$

La valeur de τ_m , donnée pour un des 3 moteurs, est bien inférieure à la valeur de τ trouvée.

Ce qui confirme le choix du moteur sur la distance de démarrage.

Question 5/

La puissance P_u , nécessaire pour vaincre le poids du bras mobile **1** à la vitesse V_{max} s'écrit :

$$P_u = Mg V_{max} = 400 \times 9,81 \times 0,1 = 400 \text{ W}$$

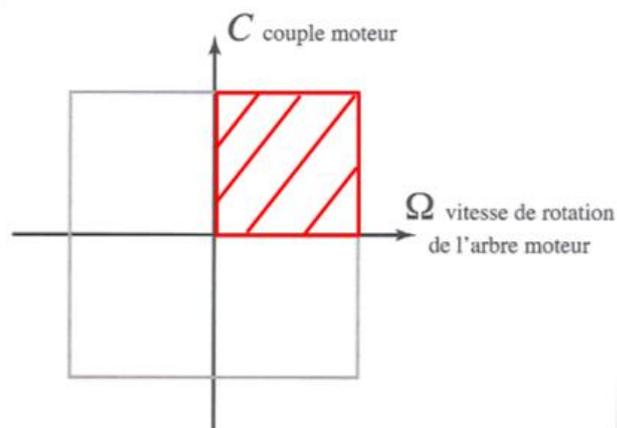
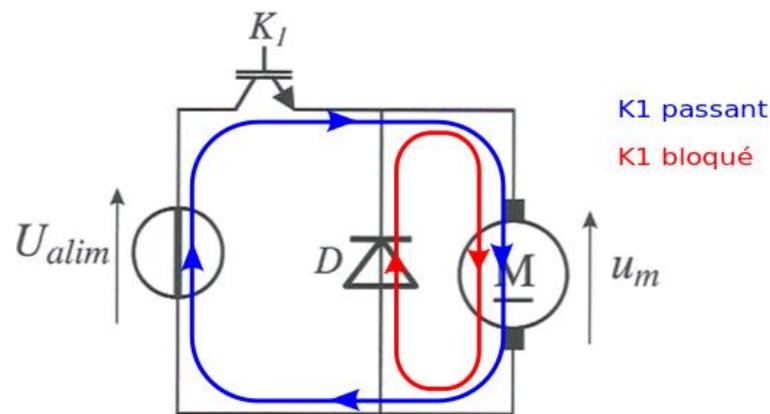
Pour une chaîne dont le moteur sera utilisé à 80% de sa puissance maximale, on a :

$$\eta_g = \frac{P_u}{P_{mot}} \Leftrightarrow P_{mot} = \frac{P_u}{2,4 \times \eta_g} = \frac{400}{2,4 \times 0,85 \times 0,9} \approx \frac{400}{1,8} \approx 220 \text{ W}$$

On a donc $P_M = 255 \text{ W} > P_{mot}$. Les moteurs proposés permettent le déplacement du bras.

Question 6/

Le transistor IGBT et la diode sont des composants unidirectionnels en courant donc ce hacheur ne permet qu'un seul sens de courant dans le moteur.



Question 7/

On note (Σ) l'ensemble des pièces mobiles du système.

L'application du théorème de l'énergie cinétique à (Σ) pendant la phase d'arrêt conduit à :

$$\Delta T(\Sigma/R_0) = W_{t_i}^{t_f}(pes \rightarrow \Sigma)$$

Où :

(R_0) est un repère galiléen lié au bâti

$W_{t_i}^{t_f}(pes \rightarrow \Sigma)$ représente le travail des forces de pesanteur pendant la phase d'arrêt.

Il vient :

$$-\frac{1}{2} M V_{max}^2 = -M g d_{arrêt}$$

Et :

$$d_{arrêt} = \frac{V_{max}^2}{2 g} = \frac{0,1^2}{2 \times 9,81} \approx 0,5 \text{ mm} \ll d$$

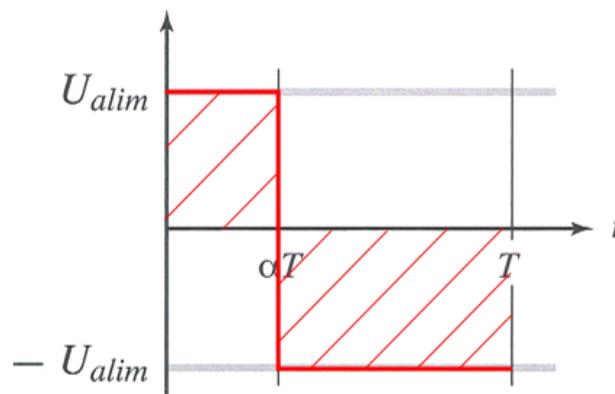
L'arrêt est rapide même sans freinage électrique. L'action de pesanteur est donc suffisante pour arrêter le bras.

La structure actuelle du hacheur ne permet pas l'arrêt du plateau puisqu'il s'agit d'un hacheur irréversible en courant.

Question 8/

Le hacheur proposé est irréversible en tension et ne permet pas d'inverser la tension de commande du moteur. Le moteur ne peut donc pas tourner dans le sens inverse.

Question 9/



$$\langle u_m \rangle = \frac{\alpha T U_{alim} - U_{alim}(T - \alpha T)}{T}$$

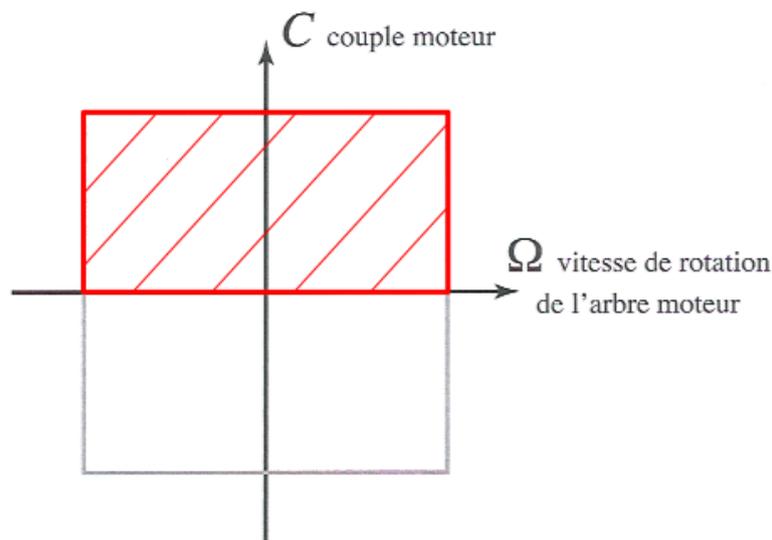
Alors :

$$\langle u_m \rangle = U_{alim}(2\alpha - 1)$$

Comme $\alpha \in [0; 1]$, on a : $-U_{alim} \leq \langle u_m \rangle \leq U_{alim}$

$\langle u_m \rangle$ peut changer de signe. Cette plage est donc compatible avec les deux sens de rotation.

Question 10/



Ce hacheur est réversible en tension et permet d'inverser le sens de rotation du moteur (montée et descente). Par contre, il ne permet de freiner le plateau pendant la phase de descente puisqu'il est irréversible en courant.

Question 11/

Le théorème de l'énergie-puissance appliqué à (Σ) s'écrit :

$$\frac{dT(\Sigma/R_0)}{dt} = P_{ext}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) + P_{int}(\Sigma)$$

En phase de montée à vitesse constante et en considérant un rendement unitaire de la chaîne de transmission, il vient :

$$3 C_m \omega_m - Mg V = 0 \Leftrightarrow 3 K_i i_m \omega_m = Mg \frac{p_v \omega_m}{2\pi N}$$

D'où :

$$i_m = \frac{Mg p_v}{6\pi N K_i} = \frac{400 \times 9,81 \times 10^{-2}}{6 \times \pi \times 5 \times 0,12} \approx \frac{40}{10,8} \approx 4 \text{ A}$$

Question 12/

La loi des mailles dans le circuit d'induit donne : $u_m = e_b + R i + L \frac{di}{dt}$

Pour $t \in [0; \alpha T]$, $u_m = U_{alim}$

Soit :

$$U_{alim} = e_b + R i + L \frac{di}{dt}$$

Question 13/

La variation de ω est négligée sur la période de découpage T.

Comme $e_b = K_b \omega_m$, e_b peut être considérée comme constante, égale à e_m .

D'après l'équation différentielle trouvée précédemment, on a :

$$\frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = \frac{U_{alim} - e_m}{R}$$

Solution générale de l'équation sans second membre : $i_g(t) = \lambda \cdot e^{-\frac{t}{\tau_e}}$ avec $\tau_e = \frac{L}{R}$

Solution particulière de l'équation complète : $i_p(t) = \frac{U_{alim} - e_m}{R}$

Solution générale de l'équation complète: $i(t) = \lambda \cdot e^{-\frac{t}{\tau_e}} + \frac{U_{alim} - e_m}{R}$

Condition initiale : $i_m(0) = i_0 \Rightarrow i_0 = \lambda + \frac{U_{alim} - e_m}{R} = i_k \Rightarrow \lambda = i_0 - \frac{U_{alim} - e_m}{R}$

On obtient alors :

$$i(t) = \frac{U_{alim} - e_m}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_e}}\right) + i_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_e}}$$

Question 14/

$$\left. \begin{array}{l} t \in [0; \alpha T] \\ T \ll \tau_e \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{t}{\tau_e} \ll 1$$

On peut donc faire un développement limité de $i(t)$ au voisinage de zéro :

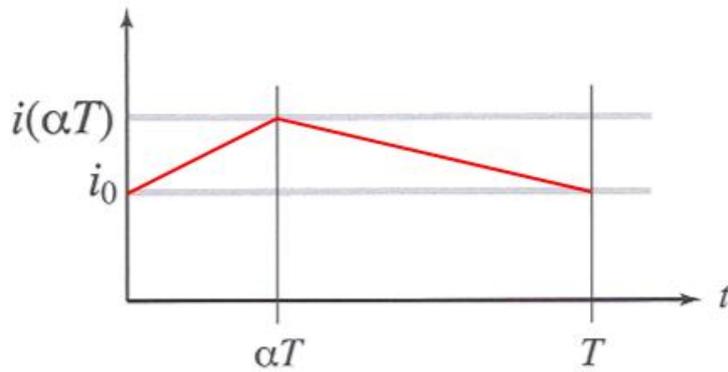
$$i(t) = \frac{U_{alim} - e_m}{R} \left(1 - 1 + \frac{t}{\tau_e}\right) + i_0 \left(1 - \frac{t}{\tau_e}\right)$$

Et :

$$i(t) = \frac{U_{alim} - e_m}{L} t + i_0$$

Pour $t = \alpha T$, il vient :

$$i(\alpha T) = \frac{U_{alim} - e_m}{L} \alpha T + i_0$$



Question 15/

Toujours dans les mêmes conditions, on détermine l'augmentation de courant Δi défini par :

$$\Delta i = i(\alpha T) - i_0 = \frac{U_{alim} - e_m}{R} \alpha \frac{T}{\tau_e}$$

Question 16/

$$\alpha \in [0; 1] \Rightarrow \Delta i < \frac{U_{alim} - e_m}{R} \frac{T}{\tau_e}$$

Afin de ne pas perturber le comportement mécanique du moteur, on impose : $\Delta i \approx \frac{i_0}{100}$

Dans ce cas, $\frac{T}{\tau_e}$ doit être de l'ordre de :

$$\frac{R}{U_{alim} - e_m} \frac{i_0}{100}$$

Avec :

$$e_m = K_b \omega_m = K_b \frac{2\pi V N}{p_v} = \frac{12}{1000} \times \frac{2 \times \pi \times 0,1 \times 5}{10^{-2}} = 36 \text{ V}$$

$$\Delta i = 2(i_m - i_0) \approx \frac{i_0}{100} \Rightarrow i_0 + \frac{i_0}{200} = i_m \Rightarrow i_0 \approx i_m = 4 \text{ A}$$

Il vient :

$$\frac{T}{\tau_e} \approx \frac{2 \times 0,04}{48 - 36} \approx \frac{2}{3} \cdot 10^{-2}$$

$\frac{T}{\tau_e}$ doit donc être de l'ordre de $\frac{1}{100}$

Question 17/

Théorème de l'Énergie Puissance appliqué à l'ensemble $E = \{ \text{bras 1, rotor du moteur, vis 3, réducteur} \}$:

$$\frac{dE_c}{dt} = P_{int} + P_{ext}$$

Avec :

$$* E_c = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}J_m\omega_m^2 + \frac{1}{2}J_v\omega_v^2 + \frac{1}{2}J_R\omega_m^2 = \frac{1}{2}\left[J_m + J_R + \frac{J_v}{N^2} + M\left(\frac{p_v}{2\pi N}\right)^2\right]\omega_m^2 = \frac{1}{2}J_{eq}\omega_m^2$$

$$* P_{int} = 0$$

$$* P_{ext} = C_m\omega_m - MgV = C_m\omega_m - Mg\frac{p_v}{2\pi N}\omega_m$$

$$\rightarrow J_{eq}\omega_m\dot{\omega}_m = C_m\omega_m - Mg\frac{p_v}{2\pi N}\omega_m$$

$$\boxed{J_{eq} = J_m + J_R + \frac{J_v}{N^2} + M\left(\frac{p_v}{2\pi N}\right)^2} \quad \boxed{C_{meq} = C_m} \quad \boxed{C_{Req} = -Mg\frac{p_v}{2\pi N}}$$

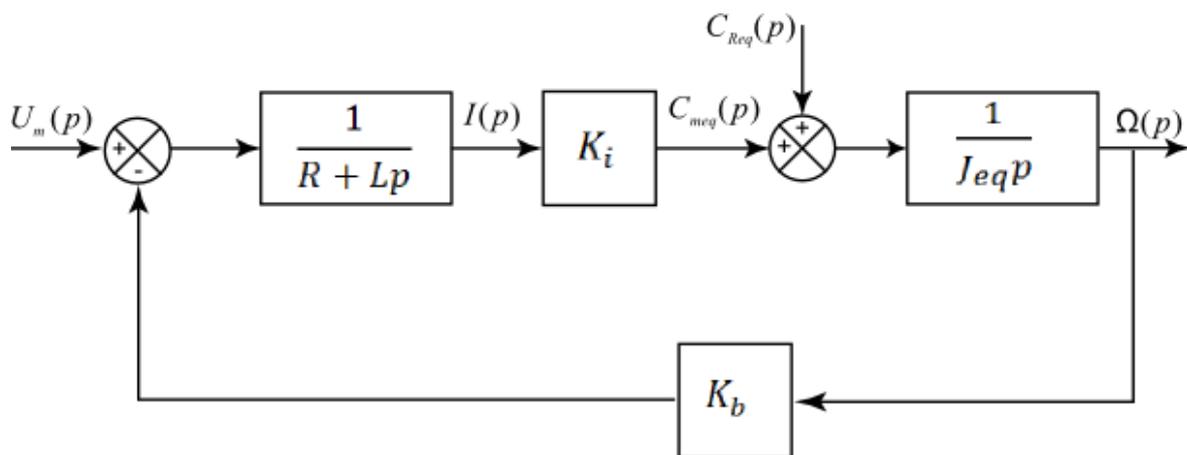
Question 18/

$$U_m(p) = LpI(p) + RI(p) + E_b(p)$$

$$C_m(p) = K_i I(p)$$

$$E_b(p) = K_b \Omega_m(p)$$

$$J_{eq}p\Omega_m(p) = C_{meq}(p) + C_{req}(p)$$



$$\Omega_m(p) = \frac{\frac{K_i}{(R + Lp)J_{eq}p}}{1 + \frac{K_i K_b}{(R + Lp)J_{eq}p}} U_m(p) + \frac{\frac{1}{J_{eq}p}}{1 + \frac{K_i K_b}{(R + Lp)J_{eq}p}} C_{Req}(p)$$

$$H_m(p) = \frac{K_i}{K_i K_b + R J_{eq} p + L J_{eq} p^2}$$

$$H_c(p) = \frac{R + Lp}{K_i K_b + R J_{eq} p + L J_{eq} p^2}$$

Question 19/

Théorème de l'Énergie Puissance appliqué à l'ensemble $E = \{ \text{bras 1, rotor du moteur a, rotor du moteur b, vis 3 a, vis 3 b, réducteur a, réducteur b} \}$:

$$\frac{dE_c}{dt} = P_{int} + P_{ext}$$

Avec :

$$\begin{aligned} * E_c &= \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}(J_{ma} + J_{mb})\omega_m^2 + \frac{1}{2}(J_{va} + J_{vb})\omega_v^2 + \frac{1}{2}(J_{Ra} + J_{Rb})\omega_m^2 \\ &= \frac{1}{2}\left[J_{ma} + J_{mb} + J_{Ra} + J_{Rb} + \frac{J_{va} + J_{vb}}{N^2} + M\left(\frac{p_v}{2\pi N}\right)^2 \right] \omega_m^2 = \frac{1}{2}J_{eq2}\omega_m^2 \end{aligned}$$

$$* P_{int} = 0$$

$$* P_{ext} = C_{ma}\omega_m + C_{mb}\omega_m - MgV = C_{ma}\omega_m + C_{mb}\omega_m - Mg\frac{p_v}{2\pi N}\omega_m$$

$$\rightarrow J_{eq}\omega_m\dot{\omega}_m = C_{ma}\omega_m + C_{mb}\omega_m - Mg\frac{p_v}{2\pi N}\omega_m$$

$J_{eq2} = J_{ma} + J_{mb} + J_{Ra} + J_{Rb} + \frac{J_{va} + J_{vb}}{N^2} + M\left(\frac{p_v}{2\pi N}\right)^2$	$C_{Req2} = -Mg\frac{p_v}{2\pi N}$
--	------------------------------------

Question 20/

$$U_{ma}(p) = L_a p I_a(p) + R_a I_a(p) + E_{ba}(p)$$

$$C_{ma}(p) = K_{ia} I_a(p)$$

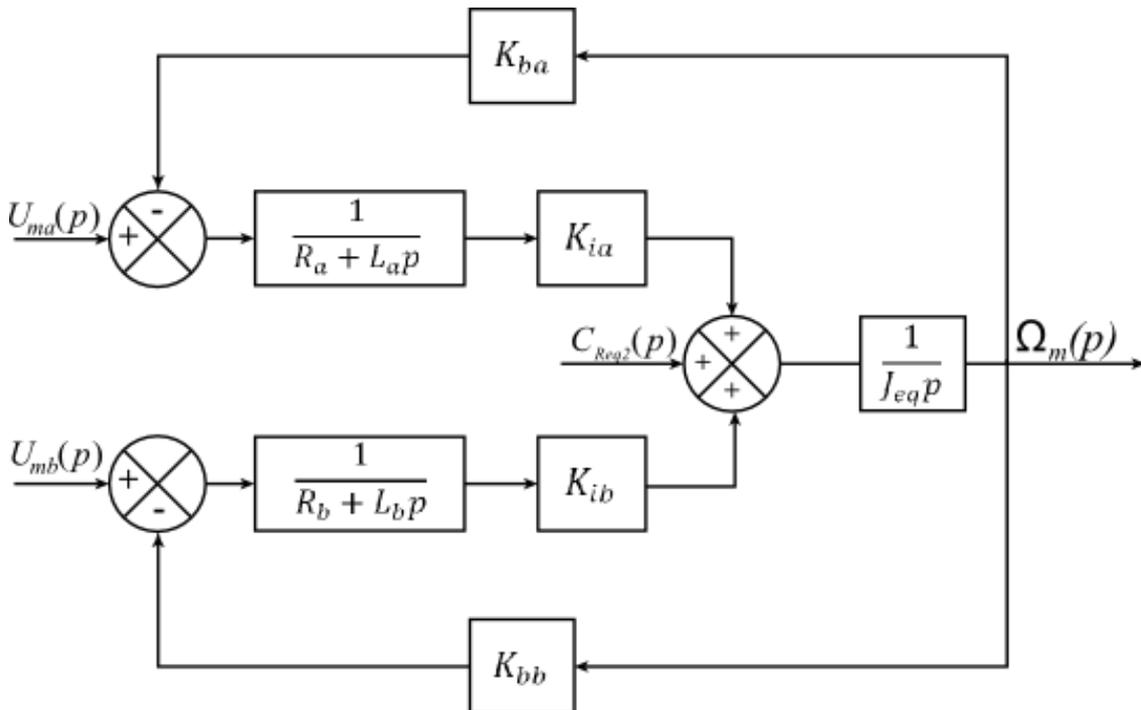
$$E_{ba}(p) = K_{ba} \Omega_m(p)$$

$$U_{mb}(p) = L_b p I_b(p) + R_b I_b(p) + E_{bb}(p)$$

$$C_{mb}(p) = K_{ib} I_b(p)$$

$$E_{bb}(p) = K_{bb} \Omega_m(p)$$

$$J_{eq2} p \Omega_m(p) = C_{ma}(p) + C_{mb}(p) + C_{Req2}(p)$$



Question 21/

$$\Omega_m(p) = \frac{1}{J_{eq2}p} \left[(U_{ma}(p) - K_b\Omega_m(p)) \frac{K_i}{R + Lp} + (U_{mb}(p) - K_b\Omega_m(p)) \frac{K_i}{R + Lp} + C_{Req2}(p) \right]$$

$$\Omega_m(p) = \frac{1}{J_{eq2}p} \left[(U_{ma}(p) + U_{mb}(p) - 2K_b\Omega_m(p)) \frac{K_i}{R + Lp} + C_{Req2}(p) \right]$$

$$\Omega_m(p) \left[1 + \frac{2K_iK_b}{J_{eq2}p(R + Lp)} \right] = \frac{K_i}{J_{eq2}p(R + Lp)} (U_{ma}(p) + U_{mb}(p)) + \frac{1}{J_{eq2}p} C_{Req2}(p)$$

$$\Omega_m(p) = \frac{K_i}{2K_iK_b + RJ_{eq2}p + LJ_{eq2}p^2} (U_{ma}(p) + U_{mb}(p)) + \frac{(R + Lp)}{2K_iK_b + RJ_{eq2}p + LJ_{eq2}p^2} C_{Req2}(p)$$

$H_{ma}(p) = H_{mb}(p) = \frac{K_i}{2K_iK_b + RJ_{eq2}p + LJ_{eq2}p^2}$	$H_{C2}(p) = \frac{(R + Lp)}{2K_iK_b + RJ_{eq2}p + LJ_{eq2}p^2}$
---	--

Question 22/

$$\Omega_m(p) = 2H_{ma}(p)U_m(p) + H_{C2}(p)C_{Req2}(p)$$

$H_{eq2m}(p) = \frac{2K_i}{2K_iK_b + RJ_{eq2}p + LJ_{eq2}p^2}$	$H_{Ceq2m}(p) = \frac{(R + Lp)}{2K_iK_b + RJ_{eq2}p + LJ_{eq2}p^2}$
--	---

$K_{i2} = 2K_i$	$K_{b2} = K_b$	$J_{eq2} = 2(J_m + J_R + \frac{J_v}{N^2}) + M \left(\frac{p_v}{2\pi N} \right)^2$	$R_2 = R$	$L_2 = L$
-----------------	----------------	--	-----------	-----------

Question 23/

$$\Omega_m(p) = 3H_{ma}(p)U_m(p) + H_{C2}(p)C_{Req3}(p)$$

$H_{eq3m}(p) = \frac{3K_i}{3K_iK_b + RJ_{eq2}p + LJ_{eq2}p^2}$	$H_{Ceq3m}(p) = \frac{(R + Lp)}{3K_iK_b + RJ_{eq2}p + LJ_{eq2}p^2}$
--	---

$K_{i3} = 3K_i$	$K_{b3} = K_b$	$J_{eq3} = 3(J_m + J_R + \frac{J_v}{N^2}) + M \left(\frac{p_v}{2\pi N} \right)^2$	$R_3 = R$	$L_3 = L$
-----------------	----------------	--	-----------	-----------

Question 24/

$$H_{eq3m}(p) = \frac{\frac{1}{K_b}}{1 + \frac{J_{eq3}R}{3K_bK_i}p + \frac{J_{eq3}L}{3K_bK_i}p^2}$$

$$H_{Ce q3m}(p) = \frac{R}{3K_b K_i} \frac{(1 + \frac{L}{R} p)}{1 + \frac{J_{eq3} R}{3K_b K_i} p + \frac{J_{eq3} L}{3K_b K_i} p^2}$$

$$\boxed{a = \frac{J_{eq3} L}{3K_b K_i}} \quad \boxed{b = \frac{J_{eq3} R}{3K_b K_i}} \quad \boxed{K_m = \frac{1}{K_b}} \quad \boxed{K_C = \frac{R}{3K_b K_i}} \quad \boxed{\tau_C = \frac{L}{R}}$$

Question 25/

$$K_{b3} = K_b = \frac{12V}{(1000 \text{tr/min})} = \frac{12V}{1000 * \frac{\pi}{30} \text{rad.s}^{-1}} = 0,12V.s.\text{rad}^{-1}$$

Question 26/

$$J_{eq3} = 3(J_m + J_R + \frac{J_v}{N^2}) + M \left(\frac{p_v}{2\pi N} \right)^2$$

$$J_{eq3} = 3 \left(800 + 80 + \frac{600}{25} \right) \cdot 10^{-7} + 400 \left(\frac{10 \cdot 10^{-3}}{2\pi 5} \right)^2 \approx 3,12 \cdot 10^{-4} \text{kg.m}^2$$

Inertie des trois réducteurs : $3(80 \cdot 10^{-7}) = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{kg.m}^2$ (7,7%)

Inertie des trois vis : $3 \frac{600}{25} 10^{-7} = 7,2 \cdot 10^{-6} \text{kg.m}^2$ (2,3%)

Inertie de la masse du bras : $400 \left(\frac{10 \cdot 10^{-3}}{2\pi 5} \right)^2 = 4,05 \cdot 10^{-5} \text{kg.m}^2$ (13%)

Question 27/

$$a = \frac{J_{eq3} L}{3K_b K_i} = \frac{3,12 \cdot 10^{-4} * 4,6 \cdot 10^{-3}}{3 * 0,12 * 0,12} = 3,3 \cdot 10^{-5}$$

$$b = \frac{J_{eq3} R}{3K_b K_i} = \frac{3,12 \cdot 10^{-4} * 2}{3 * 0,12 * 0,12} = 1,4 \cdot 10^{-2}$$

$$b^2 - 4a = 7,6 \cdot 10^{-5} > 0$$

Le discriminant est positif donc on peut factoriser le dénominateur de $H_{eq3m}(p)$ sur le corps des réels.

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{0,012}{0,0025} = 4,8$$

$\tau_2 = 4,8\tau_1$ donc on ne peut considérer l'un des modes comme dominant.

Question 28/

$$R_e(p) = \frac{1}{N}$$

$$H_v(p) = \frac{p_v}{2\pi}$$

Question 29/

Lorsque $V(p) = V_c(p)$, il faut que $\varepsilon(p) = 0$

$$\varepsilon(p) = V_c(p)A_c - \frac{G_t}{H_v(p)}V(p) = 0$$

$$\text{Il faut que } A_c = \frac{G_t}{H_v(p)} = G_t * \frac{2\pi}{p_v} = 0,1 \cdot 10^{-3} * \frac{2\pi}{10} = 62,8V/(m \cdot s^{-1})$$

Question 30/

La classe de la FTBO est nulle donc l'erreur statique est non nulle ($e_0/(1 + K_{BO})$). Hors le cahier des charges impose un écart statique en régulation nul. il n'est donc pas possible de vérifier toutes les exigences du cahier des charges.

Question 31/

$$FTBO(p) = \frac{K_{cor}}{p} \frac{K_m}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} \frac{G_t}{N}$$

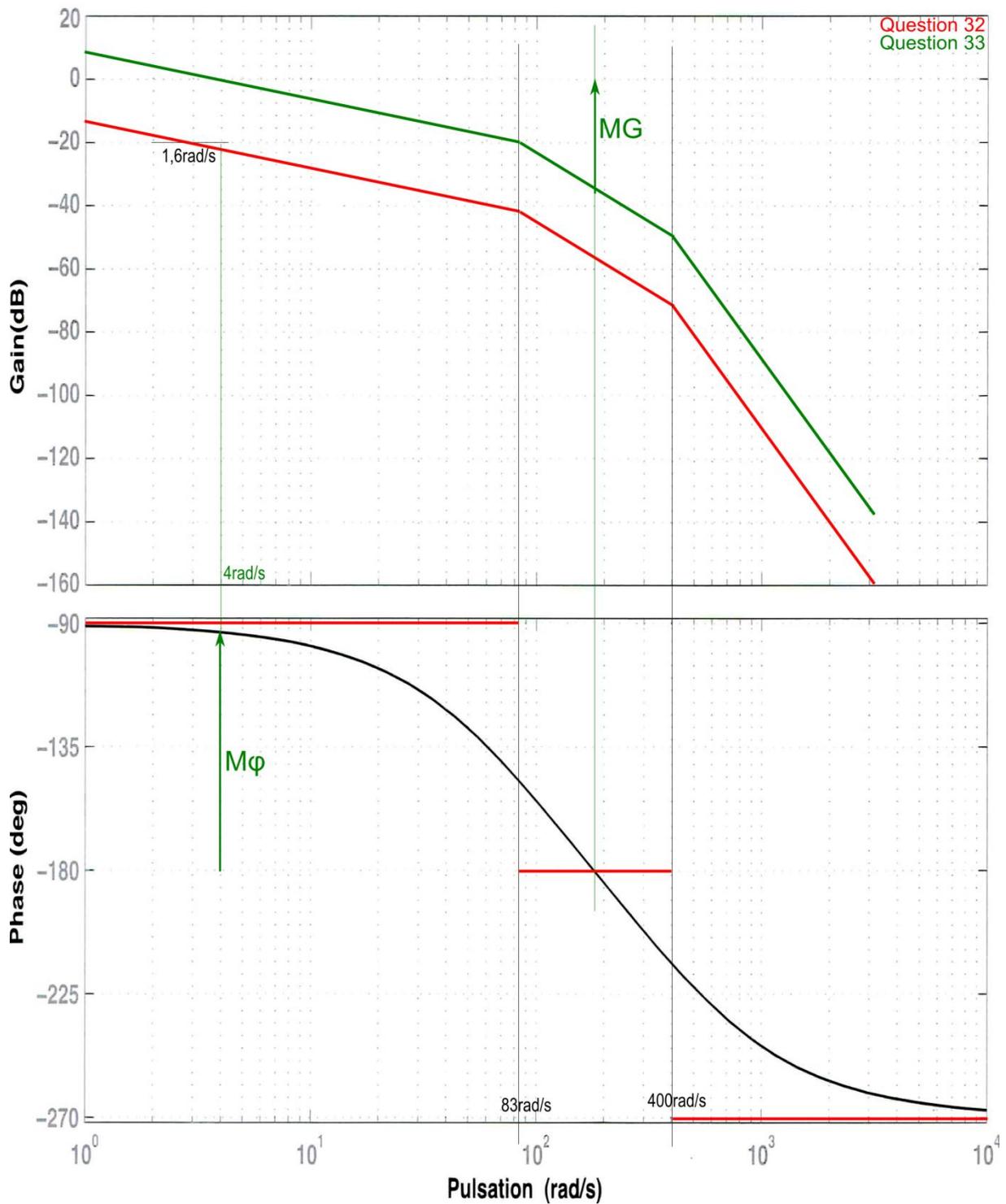
Question 32/

Pour tracer le diagramme de Bode, on décompose en trois fonctions de transfert :

$$FTBO(p) = \frac{K_{cor}K_mG_t}{p} \frac{1}{(1 + \tau_1 p)} \frac{1}{(1 + \tau_2 p)} = \frac{0,16}{p} \frac{1}{1 + 0,0025p} \frac{1}{1 + 0,012p}$$

On a donc la somme de deux premiers ordre de pulsation de cassure 80 et 400 rad/s. La fonction de transfert $0,16/p$ passe par le point (0,16rad/s,0dB) non disponible sur l'échelle des pulsation proposée. On utilise le point (1,6rad/s,-20dB).

Bode Diagram



Question 33/

$$T_{R5\%} = 3\tau = 0,75s \text{ donc } \tau = 0,25s \text{ donc } \omega = 4rad/s$$

Sur le diagramme de Bode asymptotique de la question 32, pour que la pulsation à 0dB soit égale à 4rad/s, il faut au minimum traduire la courbe des gains de 22dB, soit un gain K_{Cor} de $10^{\frac{22}{20}} = 12,6$.

À partir du diagramme asymptotique de la question 32 (en vert), la marge de phase est alors de 88° et la marge de gain de 28dB.

Question 34/

$$C_{Req3} = -\frac{Mgp_v}{2\pi N} = -\frac{400.10.10.10^{-3}}{2\pi.5} \approx -1,27N.m$$

Question 35/

Par lecture graphique sur la figure 23, le temps de réponse est légèrement supérieur à 0,75s. Le critère de cahier des charges de la figure 21 n'est donc pas respecté.

La marge de phase est respectée ($88^\circ > 65^\circ$).

La marge de gain est respectée ($22dB > 8dB$).

L'écart statique en régulation est nul

$$i_{max} = 5,5A < 20A \text{ (figure 13)}$$

$$\text{Puissance max} = 48 \cdot 4,9 = 235W < 255W$$

Tous les critères sont donc respectés sauf le temps de réponse à 5%. Cela peut provenir de l'hypothèse de la question 33.

Question 36/

Au voisinage de 0s, le bras descend au début pendant 0,1s. La charge due à la pesanteur entraîne le moteur en sens contraire au démarrage (le courant n'est pas assez grand pour la contrer le couple de la charge) puis le couple moteur devient suffisant et la charge monte.

Pour éviter ce comportement, on pourrait utiliser une vis irréversible pour que la charge ne puisse pas être motrice.

Question 37/

Liaison L_{02k} : liaison encastrement

$\{V(2k/0)\} = \{0\}_{(M;\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ quel que soit le point M du repère d'étude

$$\{\tau(0 \rightarrow 2k)\} = \begin{pmatrix} X_{02k} \\ Y_{02k} \\ Z_{02k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{02k} \\ M_{02k} \\ N_{02k} \end{pmatrix}_{(M;\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Liaison L_{12k} : liaison pivot glissant d'axe ($A_k; \vec{z}$)

$$\{V(2k/1)\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{z,2k1} & v_{z,2k1} \end{array} \right\}_{(A_k; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$\{\tau(1 \rightarrow 2k)\} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{12k} & L_{12k} \\ Y_{12k} & M_{12k} \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{(A_k; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Liaison L_{13k} : liaison hélicoïdale d'axe $(B_k; \vec{z})$

$$\{V(3k/1)\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{z,2k1} & v_{z,2k1} \end{array} \right\}_{(B_k; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$\{\tau(1 \rightarrow 3k)\} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{13k} & L_{12k} \\ Y_{13k} & M_{12k} \\ Z_{13k} & N_{13k} \end{array} \right\}_{(B_k; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

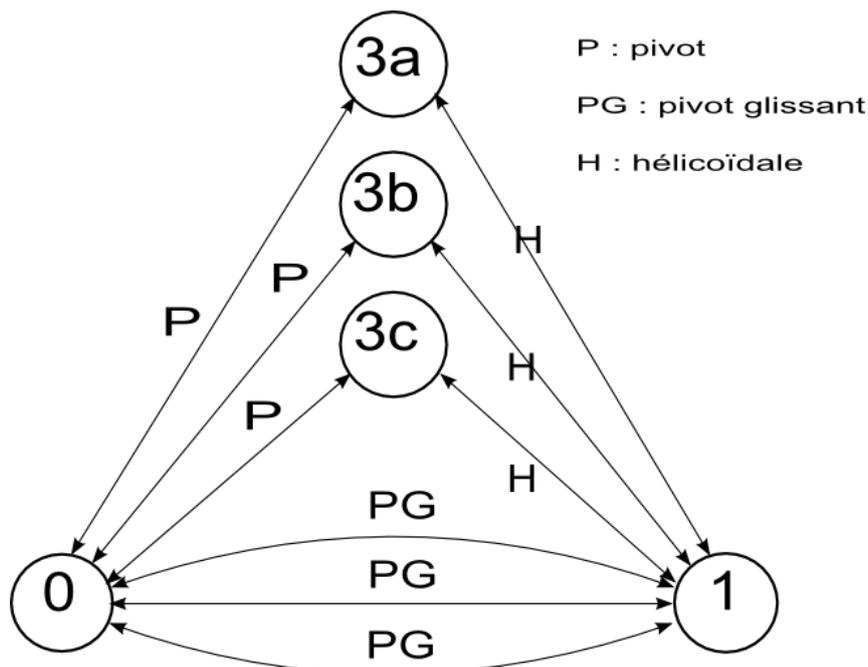
Liaison L_{03k} : liaison pivot d'axe $(B_k; \vec{z})$

$$\{V(3k/0)\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{z,2k1} & 0 \end{array} \right\}_{(B_k; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$\{\tau(0 \rightarrow 3k)\} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{03k} & L_{02k} \\ Y_{03k} & M_{02k} \\ Z_{03k} & 0 \end{array} \right\}_{(B_k; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Question 38/

$$m_c = 1$$



La loi globale cinématique s'écrit : $h = m_c - I_c + E_c$

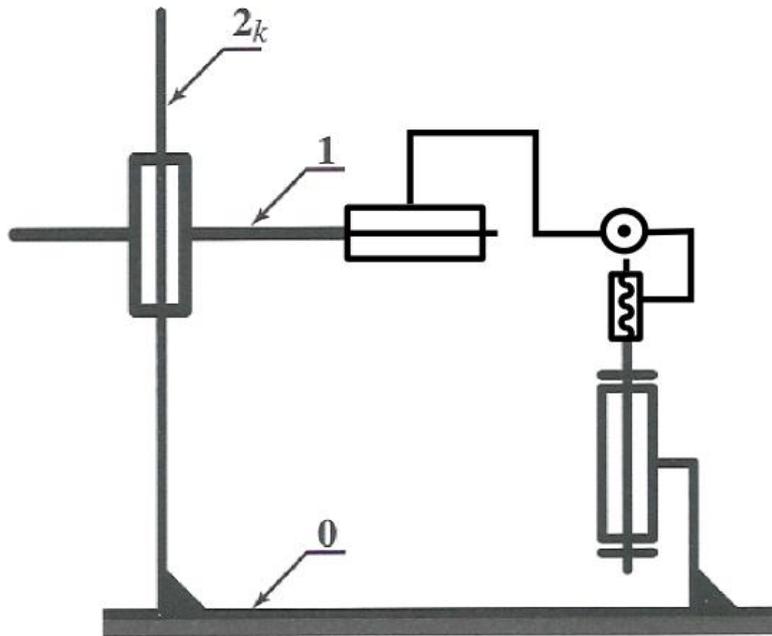
Avec :

$$E_c = 6\gamma \quad \text{et} \quad \gamma = N_l - N_p + 1 = 5 \quad (\text{voir graphe de structure})$$

$$I_c = 12$$

$$\text{D'où :} \quad h = 19$$

Question 39/

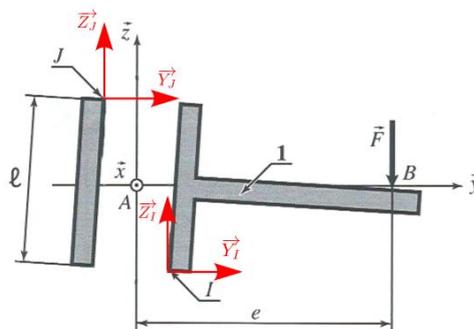


La solution proposée utilise des écrous flottants.

$$h = m - I_c + E_c = 1 - 3 * (2 + 2 + 2 + 1 + 1) + 6 * 5 = 1 - 24 + 30 = 7$$

La solution n'est pas isostatique.

Question 40/



Isolement de (1) :

L'application du Principe Fondamental de la Statique au solide (1) en I conduit aux 3 équations scalaires suivantes :

$$\begin{cases} Y_I + Y_J = 0 \\ Z_I + Z_J - F = 0 \\ -l Y_J - d Z_J - F \cdot \left(e - \frac{d}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

Question 41/

Les signes des composantes Y_I, Z_I, Y_J et Z_J avec $F > 0$ sont :

$$\begin{cases} Y_J < 0 \\ Z_J > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} Y_I > 0 \\ Z_I > 0 \end{cases}$$

Modèle de Coulomb :

$$\begin{cases} Z_J < -f Y_J \\ Z_I < f Y_I \end{cases}$$

Question 42/

On suppose que le contact en J est à la limite du glissement.

Alors : $Z_J = -f Y_J$

On obtient dans ce cas un système de 4 équations à 4 inconnues à résoudre :

$$\begin{cases} Y_I + Y_J = 0 & (1) \\ Z_I + Z_J = F & (2) \\ -f Y_J + Z_J = 0 & (3) \\ -l Y_J - d Z_J = -F \cdot \left(e - \frac{d}{2}\right) & (4) \end{cases}$$

$$d \times (3) - (4) \Rightarrow (d f - l) \cdot Y_J = F \cdot \left(e - \frac{d}{2}\right)$$

Il vient :

$$Y_J = -Y_I = F \cdot \frac{\left(e - \frac{d}{2}\right)}{d f - l}$$

Et :

$$Z_J = -f \cdot Y_J = F \cdot \frac{f \cdot \left(\frac{d}{2} - e\right)}{d f - l}$$

$$Z_I = F - Z_J = F \cdot \frac{f \cdot (e + \frac{d}{2} - l)}{d f - l}$$

En faisant intervenir la condition d'adhérence en I : $Z_I < f Y_I$, il en résulte que :

$$F \cdot \frac{f \cdot (e + \frac{d}{2} - l)}{d f - l} < F \cdot \frac{f \cdot (\frac{d}{2} - e)}{d f - l}$$

Soit :

$$\frac{l}{2e} < f$$

On en déduit finalement la condition de non arc-boutement : $\frac{l}{2e} > f$

Pour le système EOS, on a :

$$\frac{l}{2e} = \frac{20}{2 \times 20} = 0,5 \text{ et } f = 0,2$$

La condition est donc satisfaite.

Question 43/

On isole la poutre 2 :

$$Y_D - R + Y_C = 0$$

$$Z_C = 0$$

$$-Y_D H + R h = 0$$

$$\text{Soit } Y_C = \left(1 - \frac{h}{H}\right) R ; Z_C = 0 \text{ et } Y_D = \frac{h}{H} R$$

Sur le tronçon CA ($0 < z < h$) :

$$T_{coh(z)} = - \left\{ \begin{array}{l} Y_C \cdot \vec{y} \\ Y_C z \cdot \vec{z} \end{array} \right\}_{G(z)} = \left\{ \begin{array}{l} - \left(1 - \frac{h}{H}\right) R \cdot \vec{y} \\ - \left(1 - \frac{h}{H}\right) R z \cdot \vec{x} \end{array} \right\}_{G(z)}$$

Sur le tronçon AD ($h < z < H$) :

$$T_{coh(z)} = \left\{ \begin{array}{l} Y_D \cdot \vec{y} \\ -Y_D (H - z) \cdot \vec{z} \end{array} \right\}_{G(z)} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{h}{H} R \cdot \vec{y} \\ -\frac{h}{H} R (H - z) \cdot \vec{x} \end{array} \right\}_{G(z)}$$

La poutre est sollicitée en flexion simple dans les deux tronçons.

Question 44/

$$M(z) = -EI \frac{d^2 v(z)}{dz^2}$$

(Quand le moment fléchissant est positif, pour avoir un "+", la concavité doit être tournée vers les y positifs. Ici la concavité est tournée vers les y négatifs, il y a donc un "-")

Conditions limites :

Pivot en C : $V_{CA}(z = 0) = 0$

Appui simple en D : $V_{AD}(z = H) = 0$

Continuité en A : $V_{CA}(z = h) = V_{AD}(z = h)$ et $\frac{dV_{CA}(z=h)}{dz} = \frac{dV_{AD}(z=h)}{dz}$

Question 45/

$$V'(h) = \frac{R}{E'I'} \alpha'(h, H)$$

avec $\alpha'(h, H) = \alpha(h, H)$ car la pièce 1 est supposée extrêmement rigide.

Question 46/

$$I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi 10^4}{64} \approx 500 \text{ cm}^4$$

$$I' = \frac{\pi d'^4}{64} = \frac{\pi 5^4}{64} \approx 30 \text{ cm}^4$$

Question 47/

$$\varepsilon = -V(h) + V'(h) = + \frac{R}{EI} \alpha(h, H) + \frac{R}{E'I'} \alpha(h, H) = R \alpha(h, H) \left(\frac{1}{EI} + \frac{1}{E'I'} \right)$$

$$R = \frac{\varepsilon}{\alpha(h, H) \left(\frac{1}{EI} + \frac{1}{E'I'} \right)}$$

Question 48/

D'après l'expression de R dans la question 47, R sera maxi pour $\alpha(h, H)$ mini.

La déformation de flexion dans la poutre sera maximale pour $h = h_0 = 10 \text{ cm}$

On détermine $\alpha = 0,6 \cdot 10^4 \text{ cm}^3 = 0,6 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$

$$R_{max} = \frac{\varepsilon}{\alpha(h_{max}, H) \left(\frac{1}{EI} + \frac{1}{E'I'} \right)}$$

$$\text{Soit } \lambda_{max} = \frac{EIE'I'}{\alpha(h_{max}, H)(E'I' + EI)}$$

$$\text{AN : } \lambda_{max} = \frac{(200 \cdot 10^9)^2 500 \cdot 30 \cdot (10^{-8})^2}{0,6 \cdot 10^{-2} (200 \cdot 10^9)(30 + 500) \cdot 10^{-8}} \approx 1 \cdot 10^7 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

Question 49/

La contrainte normale due à la flexion ($\sigma_{xx} = -\frac{yM_{fx}}{I}$) sera supérieure dans la poutre 3 car le moment quadratique y est plus faible (30 < 500)

$$\sigma_{max} = -\frac{\frac{d'}{2}\left(-\frac{h_0}{H}R_{max}(H-h_0)\right)}{I'} = \frac{\frac{d'}{2}\left(\frac{h_0}{H}\lambda_{max}\epsilon(H-h_0)\right)}{I'}$$

$$AN : \sigma_{max} = \frac{\frac{5 \cdot 10^{-2}}{2} \left(\frac{10}{200} \cdot 1 \cdot 10^7 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3} (200 - 10) \cdot 10^{-3} \right)}{30 \cdot 10^{-8}} = 0,8 MPa$$

$$\sigma_{max} = 0,8 MPa \ll \sigma_y = 500 MPa$$

Le risque de plastification en cas de défaut de fabrication est négligeable.

Question 50/

$$T_{max} = f R_{max} = 0,2 \cdot 1 \cdot 10^7 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3} = 200 N$$

Le poids du à la masse du bras 1 est de 4000 N. L'effort induit par les frottement sentre le bras 1 et la colonne 2 n'empêche pas le mouvement de la masse.

Cet effort tangentiel parasite peut être préjudiciable pour la qualité des images réalisées par le système EOS car il n'est pas constant suivant z et il perturbera l'asservissement en position.