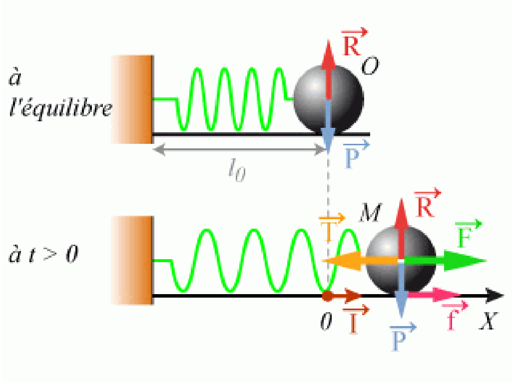
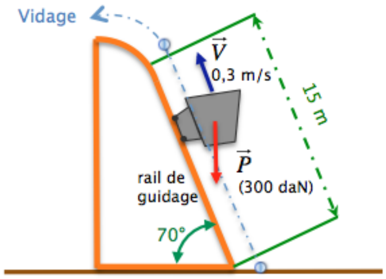
Cycle 3: Etude et modélisation des systèmes dynamiques à masse conservative

Chapitre 4 : Principe fondamental de la dynamique (PFD)
Théorème de l'énergie puissance

$$\left\{ \begin{array}{c} \sum \vec{F}(ext \to E) \\ \sum \overrightarrow{M_A}(\vec{F}(ext \to E)) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_d}(E/R) \\ \overrightarrow{\delta_A}(E/R) \end{array} \right\}_A$$





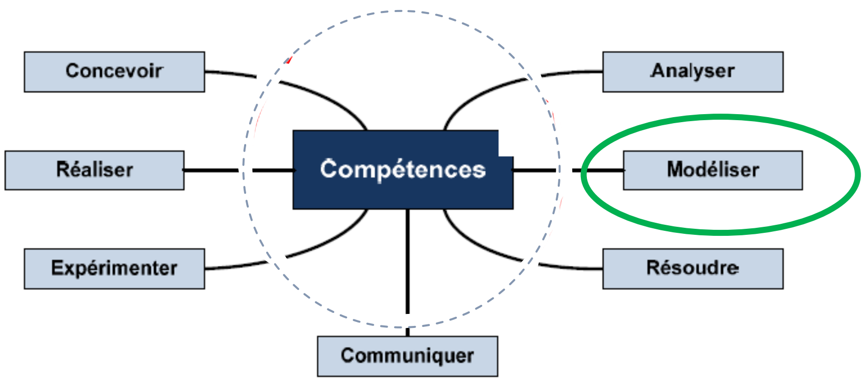
Problématique

Comment déterminer les équations différentielles de mouvement d'un ensemble de solides ?
Comment résoudre ces équations et trouver les inconnus ?

Savoir

B. Modéliser:

- Exprimer la puissance des actions mécaniques intérieures à un système
- Exprimer la puissance des actions mécaniques extérieures à un système de solides par rapport à un repère
- Appliquer le PFD à un système de solides
- Appliquer le théorème de l'énergie puissance à un système de solides



1. Principe fondamental de la dynamique des systèmes à masse conservative

1.1. Définition

Il existe au moins un espace-temps appelé galiléen, tel que le **torseur des actions mécaniques appliquées à un système** matériel E est **égal au torseur dynamique** de ce système E dans son mouvement par rapport à R.

$$\boxed{\left\{T(\text{ext} \rightarrow E)\right\} = \left\{Td(E/R)\right\}}$$

Ou encore :

$$\boxed{\left\{\begin{matrix} \sum \vec{F}(\text{ext} \rightarrow E) \\ \sum \overrightarrow{M_A}(\vec{F}(\text{ext} \rightarrow E)) \end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_d}(E/R) \\ \overrightarrow{\delta_A}(E/R) \end{matrix}\right\}_A}$$

1.2. Référentiels galiléens

Un espace-temps est défini par une chronologie galiléenne et par un repère galiléen. L'ensemble constitue un référentiel galiléen.

En mécanique classique le temps est le même pour tous les observateurs. L'échelle de temps est la **seconde**.
Le repère est un espace à trois dimensions. L'unité de longueur est le **mètre.**

Le choix du repère galiléen est fonction du problème posé.

Repères Galiléen approchés :

Le **repère de Copernic** : origine au centre d'inertie du système solaire + trois directions stellaire "fixes". Il constitue une excellente approximation d'un repère galiléen. Il convient pour l'étude des fusées interplanétaires.

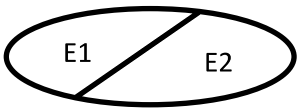
Le **repère lié au centre d'inertie de la terre** : origine au centre d'inertie de la terre + les directions stellaires précédentes (repère en translation non rectiligne et non uniforme par rapport au précédent). Il constitue une très bonne approximation d'un repère galiléen. Il convient pour l'étude des systèmes matériels restant au voisinage de la terre.

Le **repère terrestre** : il convient en général aux phénomènes mécaniques classiques.

2. Théorème des actions réciproques

Ce théorème a déjà été démontré dans le cadre du cours de statique de PTSI. Soient E_1 et E_2 deux systèmes matériels disjoints et $E = (E_1 \cup E_2)$.

Considérons les torseurs s'exerçant sur :



E_1 : $\left\{T_{E2 \rightarrow E1}\right\}$ torseur des efforts exercés par E_2 sur E_1.

E_2 : $\left\{T_{E1 \rightarrow E2}\right\}$ torseur des efforts exercés par E_1 sur E_2.

$$\boxed{\left\{T_{E2 \rightarrow E1}\right\} = -\left\{T_{E1 \rightarrow E2}\right\}}$$

Théorème:

E_1 et E_2 étant deux systèmes matériels disjoints, le torseur des actions mécaniques exercées par E_1 sur E_2 est opposé au torseur des actions mécaniques exercées par E_2 sur E_1.

3. Théorèmes généraux

Du principe fondamental de la dynamique, traduisant l'égalité de deux torseurs, on peut déduire **deux égalités vectorielles** : ce sont les théorèmes généraux.

Soit m la masse et G le centre d'inertie d'un système matériel E en mouvement par rapport au repère galiléen R. soit un point A quelconque.

3.1. Théorème de la résultante dynamique

$$\boxed{\sum \vec{F}(ext \rightarrow E) = m\vec{\Gamma}(G/R)}$$

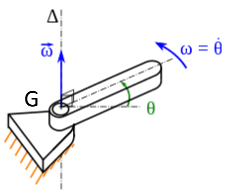
3.2. Théorème du moment dynamique

$$\boxed{\sum \overrightarrow{M_A}(\vec{F}(ext \rightarrow E)) = \overrightarrow{\delta_A}(E/R)}$$

3.3. Cas particuliers

3.3.1. *Cas d'un solide S en mouvement de rotation par rapport à R*

G est le centre d'inertie du solide S appartenant à l'axe de rotation Δ orienté par le vecteur $\vec{i}$. Le moment d'inertie su solide S par rapport à l'axe Δ est noté : I_Δ .



$$\boxed{\sum \vec{F}(ext \rightarrow S) = m\vec{\Gamma}(G/R) = \vec{0}}$$

$$\boxed{\Sigma \overrightarrow{M_G}\left(\vec{F}\left(ext \rightarrow S\right)\right) = \overrightarrow{\delta_G}\left(S/R\right) = I_\Delta \ddot{\theta}\,\vec{i}}$$

3.3.4. *Cas d'un solide S en mouvement de translation par rapport à R*

$$\boxed{\sum \vec{F}(ext \rightarrow S) = m\vec{\Gamma}(G/R)}$$

$$\boxed{\sum \overrightarrow{M_G}(\vec{F}(ext \rightarrow S)) = \overrightarrow{\delta_G}(S/R) = \vec{0}}$$

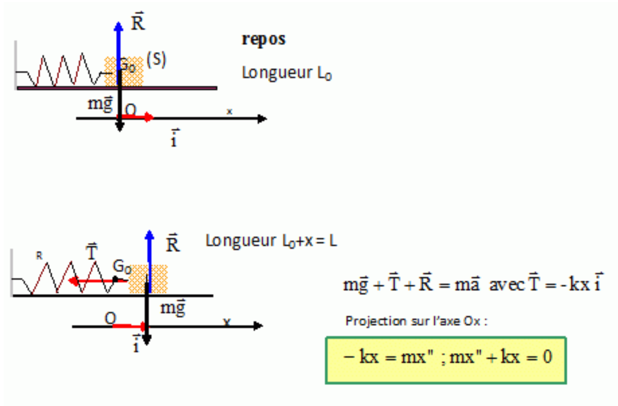
4. Equations différentielles du mouvement

Soit un système matériel E, en mouvement, dont la position par rapport au repère galiléen est définie par n paramètres $q_i(t)$. L'application du principe fondamental de la dynamique à E conduit à écrire **deux équations vectorielles**. La **projection sur un axe d'une équation vectorielle donne une équation scalaire**, qui est une **équation différentielle du second ordre**, **non linéaire** en général de la forme :

$f(q_i(t), q_i'(t), q_i''(t), t)$.

Dans cette équation différentielle peuvent figurer outre les paramètres $q_i(t)$, les dérivées premières et secondes par rapport à t $q_i'(t)$, $q_i''(t)$ et la date t, des données du problème (données géométriques, d'inertie, composantes connues ou inconnues d'actions mécaniques,...).

C'est une **équation de mouvement**.



5. Puissance des efforts extérieurs, des inter-efforts

5.1. Puissance des efforts extérieurs à un système

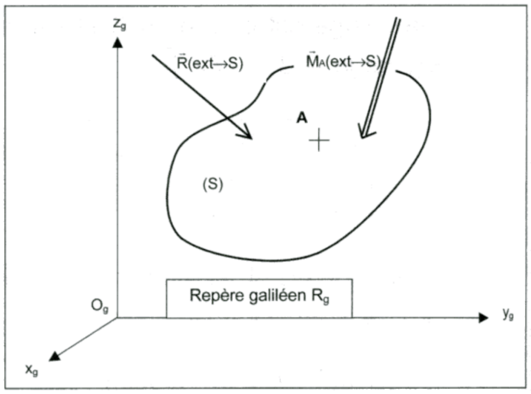
5.1.1. Cas d'un solide

Un seul solide S ne peut être soumis qu'à des actions extérieures :

- ✓ *Actions de contact dans ses liaisons avec les autres solides ;*
- ✓ *Actions à distance : pesanteur en général.*

Ces actions se résument au torseur des efforts extérieurs.

Ces actions extérieures développent une **puissance galiléenne** qui est le **comoment du torseur cinématique** du solide S exprimé par rapport au repère galiléen R et du torseur des efforts extérieurs appliqués à ce solide :



$$\boxed{P(ext \to S) = \{T(ext \to S\} \otimes \{V(S/R)\}}$$

Remarques :

- ✓ Ce résultat ne peut être appliqué que dans le cas de forces agissant sur un **solide indéformable.**
- ✓ Le **comoment de deux torseurs ne dépend pas du point choisi**, mais le calcul doit être effectué en utilisant le **même point pour la réduction des deux torseurs**.
- ✓ La valeur de la puissance depend du **choix du repère** par rapport auquel le solide se déplace.

Les expressions des torseurs étant les suivantes :

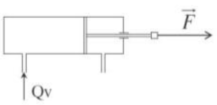
$$\{T(ext \to S)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(ext \to S) \\ \overrightarrow{M_A}(ext \to S) \end{Bmatrix}_A \qquad \{V(S/R)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(A \in S/R) \end{Bmatrix}_A$$

Alors : $\boxed{P(ext \to S) = \vec{R}(ext \to S).\vec{V}(A \in S/R) + \overrightarrow{M_A}(ext \to S).\vec{\Omega}(S/R)}$

Cas particuliers :

- ✓ L'action mécanique peut être modélisée par un glisseur dont la droite d'action passe par A **(mouvement de translation)**:

$$P(1 \to S) = \begin{Bmatrix} \vec{R}(1 \to S) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A \otimes \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(A \in S/R) \end{Bmatrix}_A = \vec{R}(1 \to S).\vec{V}(A \in S/R)$$

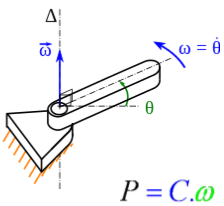


F : force exercée par la tige du vérin
v : vitesse en sortie de tige
S : section du piston
Q_v : débit reçu
p : pression dans la chambre du vérin.

La puissance utile d'un vérin est donnée par la relation :

$$P_u = F \times v$$

- ✓ L'action mécanique peut être modélisée par un **torseur couple** (**mouvement rotation**)



$$P = C.\omega$$

$$P(1 \to S) = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{C} \end{Bmatrix}_A \otimes \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(A \in S/R) \end{Bmatrix}_A = \vec{C}.\vec{\Omega}(S/R)$$

L'unité de la puissance est le **Watt** ou $N.m.s^{-1}$ ou $kg.m^2.s^{-3}$.
C'est la puissance développée par une force de un Newton appliquée à un point matériel animé d'une vitesse de un mètre par seconde dans la direction (vectorielle) de la force.

Autres unités :**1Ch = 736 W**; 1kW = 1,36 Ch

5.5.2. Cas d'un système de solides

Dans le cas où plusieurs actions extérieures s'exercent sur un système de plusieurs solides, il est recommandé de calculer séparément les puissances développées par chaque effort agissant sur chacun des solides. Cela permet de **choisir**, pour le calcul de chaque comoment, le **point de réduction le plus adapté** (celui qui donne les calculs les plus simples

6. Puissance développée par des inter-efforts dans une liaison élémentaire

Considérons deux solides S_1 et S_2 en mouvement par rapport à un repère R, reliés par une liaison dont le torseur statique est $\{T_{S1\to S2}\}$.

La puissance développée, à l'instant t, par les inter-efforts s'exerçant entre S_1 et S_2 dans leur mouvement par rapport à R est donnée par l'expression suivante :

$$P(S_2 \leftrightarrow S_1 / R) = P(S_2 \to S_1 / R) + P(S_1 \to S_2 / R) = \{T_{S2\to S1}\} \otimes \{V(S_1 / R)\} + \{T_{S1\to S2}\} \otimes \{V(S_2 / R)\}$$

Or d'après le théorème des actions réciproques :

$\{T_{S2\to S1}\} = -\{T_{S1\to S2}\}$ donc :

$$P(S_2 \leftrightarrow S_1 / R) = \{T_{S2\to S1}\} \otimes \{V(S_1 / R) - V(S_2 / R)\} = \{T_{S2\to S1}\} \otimes \{V(S_1 / S_2)\}$$

La puissance développée par les inter-efforts dans une liaison entre deux solides est indépendante du repère.

$$\boxed{P(S_2 \leftrightarrow S_1) = \{T_{S2\to S1}\} \otimes \{V(S_1 / S_2)\}}$$

Cas particuliers de la liaison parfaite :

Deux solides S_1 et S_2 sont en **liaison parfaite** si, quel que soit le mouvement de S_2 par rapport à S_1 autorisé par la liaison, la **puissance développée par les inter-efforts s'exerçant entre S_1 et S_2 est nulle.**

$$\boxed{P(S_2 \leftrightarrow S_1) = \{T_{S2\to S1}\} \otimes \{V(S_1 / S_2)\} = 0}$$

7. Travail

On considère 2 systèmes matériels Σ et E. Le système matériel Σ exerce sur le système matériel E une action mécanique. Le système matériel E est en mouvement par rapport à un repère R.
On appelle **travail, entre les dates t_1 et t_2**, de l'action mécanique du système matériel Σ sur le système matériel E, dans le mouvement de E par rapport à R, l'expression :

$$\boxed{W_{t1}^{t2}(\Sigma \to E / R) = \int_{t1}^{t2} P(\Sigma \to E)\, dt \quad \text{ou} \quad P = \frac{dW}{dt}}$$

Par dérivation de cette expression, on obtient le travail élémentaire entre les dates t et t + dt :

$$\boxed{dW(\Sigma \to E / R) = P(\Sigma \to E)\, dt}$$

L'unité de travail est le **Joule noté J ou N.m ou kg.m^2.s^{-2}**. C'est le travail développé par une force de un Newton dont le point d'application se déplace de un mètre dans la direction de la force.
Autre unité : **1 kWh = 3600 J.**

Remarque :
*Comme la puissance développée par les actions mutuelles, le travail des actions mutuelles est lui aussi **indépendant du repère.***

Remarques :

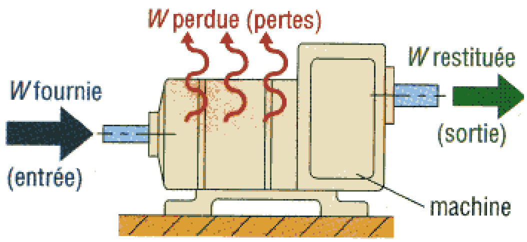
- ✓ *Un ensemble matériel* ***possède de l'énergie lorsqu'il est capable de développer une puissance (ou encore de produire un travail).***
- ✓ *L'énergie cinétique et l'énergie potentielle sont les deux formes d'énergie mécanique.*
- ✓ *L'énergie cinétique correspond à l'énergie acquise par un ensemble matériel lorsqu'il est en mouvement. La disparition de la cause ayant entraîné ce mouvement ne provoque pas la fin du mouvement. Il se poursuit grâce à l'énergie cinétique acquise.*

9. Rendement

Le **rendement η** d'une machine est égal au rapport de la puissance (ou énergie) restituée sur la puissance (ou énergie) fournie ou reçue.

$$\boxed{\eta = \frac{\text{Prestituée}}{\text{Pfournie}} = \frac{\text{Wrestituée}}{\text{Wfournie}} \leq 1}$$

$$\boxed{\eta = \frac{\text{Pfournie} - \text{Pperdue}}{\text{Pfournie}} = 1 - \frac{\text{Pperdue}}{\text{Pfournie}} \leq 1}$$



Remarque : l'énergie perdue peut l'être sous forme de chaleur, de frottements, etc…

10. Théorème de l'énergie cinétique ou énergie-puissance

10.1. Cas d'un solide

La puissance galiléenne développée par les actions extérieures au solide (S) a pour expression :

$$\boxed{P(ext \rightarrow S) = \{T(ext \rightarrow S)\} \otimes \{V(S/R)\}}$$

Le **théorème de l'énergie cinétique dit aussi théorème de l'énergie-puissance** :

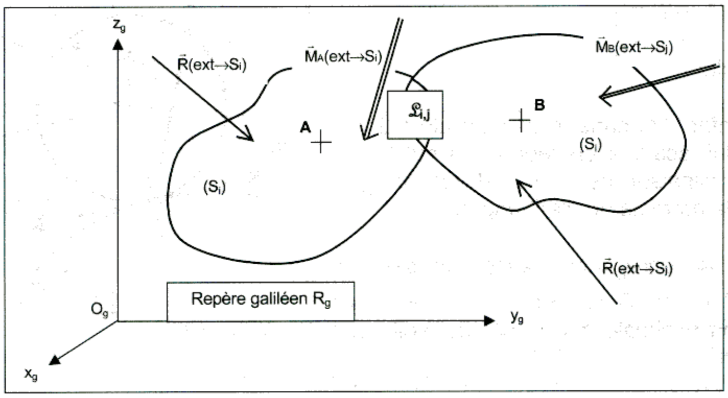
La puissance galiléenne des actions extérieures appliquées à un solide est égale à la dérivée de son énergie cinétique galiléenne.

$$\boxed{\left[\frac{d(T(S/R)]}{dt}\right] = P(ext \rightarrow S)}$$

Remarque :
Dans cette expression, les dénominations puissance et énergie cinétique galiléennes ne sont pas superflues mais essentielles. Les calculs seront toujours effectués par rapport au repère galiléen.

10.2. Cas d'un ensemble de solides

Considérons l'ensemble E constitué ici des solides S_i et S_j assemblés par la liaison L_{ij}.



En généralisant à un ensemble de n solides reliés par p liaisons, le théorème de l'énergie-puissance se résume à la formule suivante :

$$\boxed{\left[\frac{d(T(E/R)}{dt}\right] = \sum_{i=1}^{n} P(\bar{E} \to S_i) + \sum_{i=1,\,j=2}^{n-1,n} P(S_i \leftrightarrow S_j)}$$

Ou de façon plus synthétique :

$$\boxed{\left[\frac{d(T(E/R)}{dt}\right] = P_{ext}(\bar{E} \to E) + P_{int}(E)}$$

Avec :

$P_{ext}(\bar{E} \to E)$: Puissances galiléennes développées par les actions extérieures à l'ensemble E

$P_{int}(E)$: Puissances développées par les actions intérieures à l'ensemble E.

Remarque sur la méthodologie de résolution d'un problème de dynamique

On cherche soit:

- *des actions mécaniques,*
- *des paramètres de mouvement.*

Dans les 2 cas, le nombre des inconnues va décider de la difficulté de résolution.

Si le sujet demande de trouver **plusieurs efforts et moments** ⇒ j'applique le **PFD à un ensemble de solides E au point P dans le repère galiléen R_0 et en projection sur la base B_1.**

Si le problème n'a qu'**UNE inconnue**: inutile de se lancer dans l'application complète du PFD.
Suivant l'inconnu à déterminer (effort, couple...), il faut **appliquer le théorème de la résultante dynamique** ou du **moment dynamique en projection sur l'axe recherché**.

Ex : chercher le moment donné par un moteur sur Az → appliquer le Th. du Mt Dynamique aux solides concernés, en A, et projeté sur z