



TD – Dynamique des systèmes à masse conservative

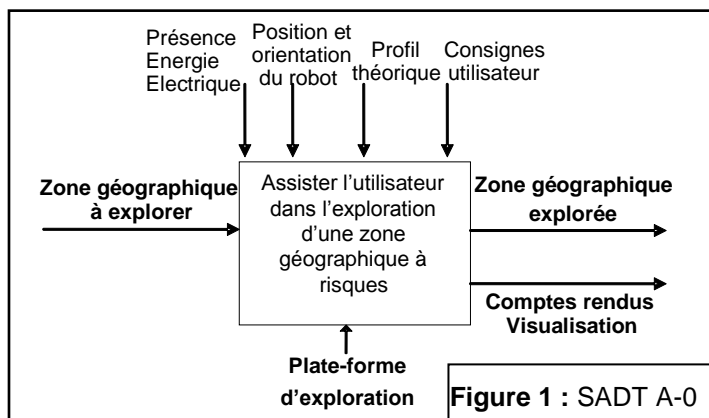
Cet énoncé comporte 10 pages numérotées de 1 à 10. Le travail doit être reporté sur un document-réponse de 6 pages distribuées avec le sujet. Un seul document-réponse est fourni au candidat. Le renouvellement de ce document en cours d'épreuve est interdit. Pour valider ce document-réponse, chaque candidat doit obligatoirement y inscrire à l'encre, à l'intérieur du rectangle d'anonymat situé en haut de chaque copie, ses nom, prénoms (souligner le prénom usuel), numéro d'inscription et signature, avant même d'avoir commencé l'épreuve. Il est conseillé de lire la totalité de l'énoncé avant de commencer l'épreuve.

Les questions sont organisées au sein d'une progression logique caractéristique de la discipline, certaines questions étant partiellement dépendantes : Il est donc souhaitable de les traiter dans l'ordre. La rédaction des réponses sera la plus concise possible : on évitera de trop longs développements de calculs en laissant subsister les articulations du raisonnement.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

ROBUROC 6 : PLATE-FORME D'EXPLORATION TOUT TERRAIN

Le robuROC 6 (photographie ci-contre) est un robot mobile développé par la société ROBOSOFT. Cette plate-forme robotisée a été conçue pour des applications de recherche et d'exploration en milieu extérieur. Elle est équipée de 6 roues motrices indépendantes, de même diamètre, montées par paires sur 3 podés articulés en tangage et en roulis (**figure 3**). La cinématique permet à la plate-forme de se conformer au relief parcouru et de franchir des obstacles du type trottoirs, escaliers... Le robuROC 6 a été conçu pour se déplacer en zones urbaines et peut aussi s'adapter à tous types de milieux.



Afin d'explorer la zone géographique à risques, les 3 podés peuvent être équipés, selon les besoins de l'utilisateur, de caméras d'observation haute définition à 360°, de systèmes infrarouges de visualisation nocturne, ainsi que de bras de robot articulés pour manipuler des éléments de la zone à explorer. Les diagrammes SADT A-0 (**figure 1**) et FAST (**annexe 1**) recensent les fonctions remplies par la plate-forme.

Les déplacements de la plate-forme sont coordonnés par l'intermédiaire de deux microcontrôleurs placés dans les podés avant et arrière. Ces microcontrôleurs communiquent entre eux et dialoguent avec l'extérieur suivant deux modes de conduite :

- Le mode **joystick** : l'utilisateur pilote manuellement la plate-forme par l'intermédiaire d'une télécommande;
- Le mode **automatique** : la plate-forme traite les informations du logiciel de supervision notamment le suivi d'un profil théorique.

Pour se repérer dans l'espace, la plate-forme est équipée de capteurs relatifs positionnés sur chacune des six roues, d'inclinomètres et d'un système de positionnement absolu par GPS. Des capteurs à ultrasons et des « bumpers » (détecteurs de collision) participent à la sécurité matérielle et à la détection des obstacles.

La motorisation principale est assurée par six moteurs électriques équipés de réducteurs épicycloïdaux permettant de transmettre l'énergie mécanique aux six roues. Le franchissement des obstacles est facilité par un système hydraulique permettant le soulèvement des podes avant et arrière. Ce système est constitué de quatre vérins disposés de part et d'autre du podo central (**figure 3**) et d'une centrale hydraulique alimentée par une pompe à engrenage (**annexe 2**). La plate-forme peut se déplacer, sous conditions, en mode 6 roues ou 4 roues pour certaines applications particulières (**figure 2**). L'énergie électrique nécessaire au fonctionnement est stockée dans des batteries occupant la plus grande partie du volume interne des trois podes. Une unité de gestion électrique optimise la consommation d'énergie.

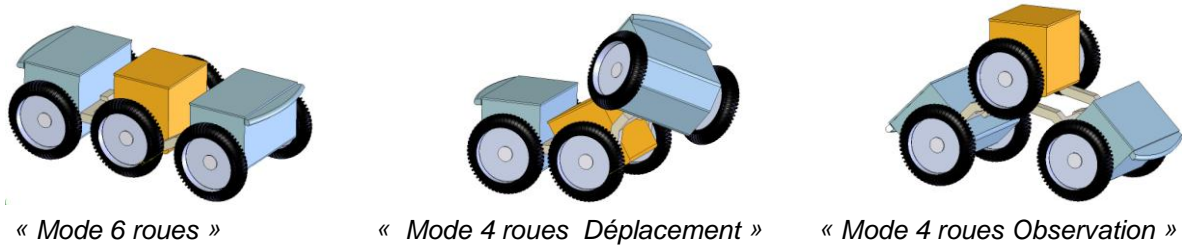


Figure 2 : Mode de déplacement de la plate-forme

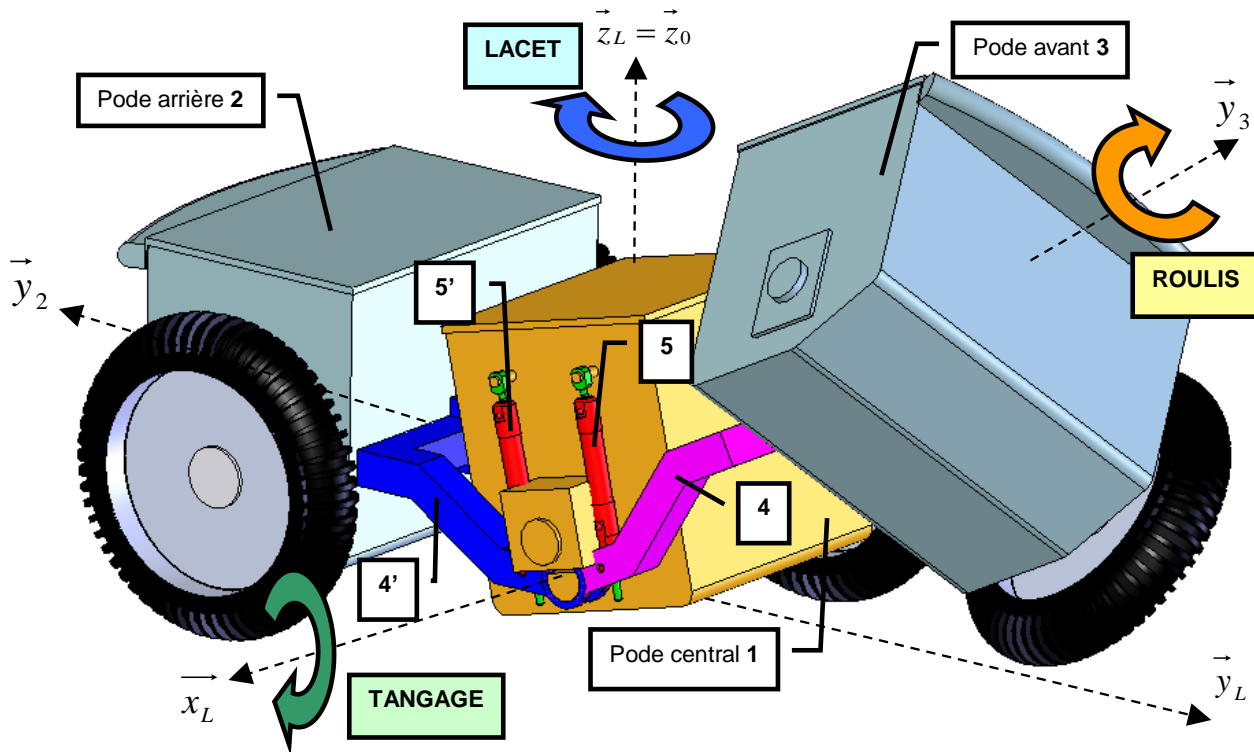


Figure 3 (roue centrale et roue avant droite supprimées pour plus de visibilité)

Les trois podes sont articulés en tangage et en roulis (**figure 3**). Le mouvement de **tangage** est guidé par deux liaisons pivot (d'axe de direction \vec{x}_L), respectivement entre le bras d'articulation avant 4 et le podo central 1 et entre le bras d'articulation arrière 4' et le podo central 1. Le système hydraulique de suspension permet l'amortissement (mode passif) et la motorisation de ce mouvement (mode actif). Les vérins 5 (côté droit) et 6 (côté gauche) sont en liaison avec le bras d'articulation avant 4 et le podo central 1. Les vérins 5' (côté droit) et 6' (côté gauche) sont en liaison avec le bras d'articulation arrière 4' et le podo central 1. Le mouvement de **roulis** est assuré par deux liaisons pivot entre le podo avant 3 et le bras d'articulation avant 4 (liaison d'axe de direction \vec{y}_3) d'une part, et entre le podo arrière 2 et le bras d'articulation arrière 4' (liaison d'axe de direction \vec{y}_2) d'autre part. Ce mouvement n'est pas motorisé.

Extrait du cahier des charges fonctionnel (d'après le diagramme exigences en annexe 1):

Fonctions	Critères	Niveaux	Flexibilité
FT3 : Assurer le déplacement	Vitesse de déplacement de la plate-forme	13,7 km/h	Valeur maximale
	Hauteur de franchissement d'un obstacle de type « trottoir » (D_{max})	40 cm	Valeur minimale
	Pente du relief à vide	45 °	Valeur maximale
	Débattement angulaire en tangage du bras 4 par rapport au podo central 1	de -45° à +30°	-----
	Débattement angulaire en tangage du bras 4' par rapport au podo central 1	de +45° à -30°	-----
	Débattement angulaire en roulis du podo avant 3 par rapport au bras 4	de -45° à +45°	-----
	Débattement angulaire en roulis du podo arrière 2 par rapport au bras 4'	de +45° à -45°	-----
FT4 : Analyser la zone géographique à explorer	Charge utile répartie sur les trois podes	100Kg	Valeur maximale
	Hauteur d'observation (H_{obs})	85 cm	Valeur minimale
FT6 : Fournir l'énergie électrique	Autonomie d'utilisation	4h	+/- 1h selon les conditions

I. FONCTION TECHNIQUE FT 31 : ASSURER LE MOUVEMENT DE LACET

Hypothèses :

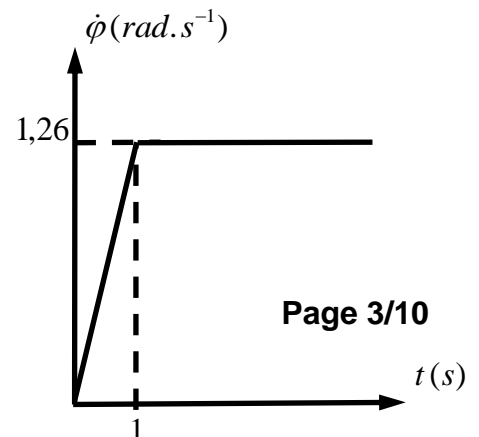
- Dans toute la **partie III**, le mouvement de roulis n'est pas considéré. Il est fixé à une valeur nulle.

Les 6 roues de la plate-forme (notée PF) sont motorisées permettant ainsi de se déplacer sur des reliefs très accidentés. Cependant, la plate-forme ne comporte pas de systèmes spécifiques de direction. Le changement de direction est imposé par une rotation différentielle des roues du podo central 1. Les roues avant et arrière doivent alors avoir des vitesses de rotation compatibles avec celles du podo central 1. Lorsque le rayon de courbure de la trajectoire suivie par la plate-forme devient inférieur à 4 mètres, le groupe hydraulique est actionné pour passer en « *Mode 2 roues instable* ». La plate-forme ne tenant pas en équilibre sur 2 roues, elle retombe dès le début du mouvement sur les roues arrière ou les roues avant, passant donc en « *Mode 4 roues Déplacement* ». Cette intervention du groupe hydraulique permet ainsi de soulager le contact entre les roues des podes avant / arrière et le sol. Pour cette étude, nous considérerons que la plate-forme retombe sur les roues arrière (**annexe 9**) et nous nous placerons dans le cas d'un rayon de courbure nul. Le mouvement de lacet étudié est donc une

rotation autour de l'axe (C_1, \vec{z}_0) d'angle φ , appelé *angle de lacet*.

Ce mouvement est défini par le torseur cinématique suivant :

$$\{V(PF/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(PF/0) = \dot{\varphi} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{C_1}$$



L'objectif de cette partie est de valider l'aptitude du système à respecter la loi de vitesse de la **figure 4**.

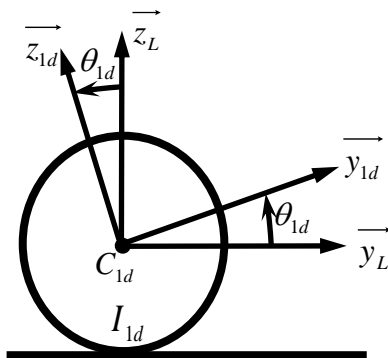
Le modèle cinématique retenu est représenté sur l'**annexe 9**.

Les roues centrales et les roues arrière sont en contact avec le sol. Dans ce mode, seules les roues centrales R_{1d} et R_{1g} sont motrices. Elles roulent sans glisser sur le sol en I_{1d} et I_{1g} . Les roues du pôle avant **3** et du pôle arrière **2** sont bloquées (**figure 5**).

Paramétrage : (**annexe 9**)

Figure 4 : Loi de commande de vitesse

- $R_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au sol **0** et supposé « galiléen » ;
- $R_L = (C_1, \vec{x}_L, \vec{y}_L, \vec{z}_L)$ lié à la plate-forme *PF* tel que $\varphi = (\vec{x}_0, \vec{x}_L) = (\vec{y}_0, \vec{y}_L)$ appelé angle de lacet ;
- $R_1 = (C_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ lié au pôle central **1** tel que $\beta = (\vec{y}_L, \vec{y}_1) = (\vec{z}_L, \vec{z}_1)$;
 β est l'angle de tangage ; $\beta = 2^\circ$ (supposé constant pendant tout le mouvement de lacet) ;
- $R_3 = (C_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ lié au pôle avant **3** tel que $2\beta = (\vec{y}_L, \vec{y}_3) = (\vec{z}_L, \vec{z}_3) = 4^\circ$;
- $\vec{C_1C_3} = b \cdot \vec{y}_3$ et $\vec{C_1C_2} = -b \cdot \vec{y}_L$ avec $b = 553mm$;
- La **figure 5** permet de définir le paramétrage de chacune des roues de la plate-forme en contact avec le sol avec l'exemple de la roue centrale droite R_{1d} .



	Nom	Centre de gravité	Point de contact avec le sol	Vitesse de rotation / au pôle central	Repère associé
Roue centrale droite	R_{1d}	C_{1d}	I_{1d}	$\dot{\theta}_{1d}$	$R_{1d} = (C_{1d}, \vec{x}_L, \vec{y}_{1d}, \vec{z}_{1d})$
Roue centrale gauche	R_{1g}	C_{1g}	I_{1g}	$\dot{\theta}_{1g}$	$R_{1g} = (C_{1g}, \vec{x}_L, \vec{y}_{1g}, \vec{z}_{1g})$
Roue arrière droite	R_{2d}	C_{2d}	I_{2d}	nulle	-----
Roue arrière gauche	R_{2g}	C_{2g}	I_{2g}	nulle	-----

Figure 5 : Paramétrage des roues en contact avec le sol

Caractéristiques géométriques et d'inertie des solides :

- Le mouvement de roulis étant nul et le mouvement de tangage étant fixé à une valeur constante, il est possible de définir l'ensemble rigide Σ constitué des trois podes **1**, **2** et **3**, des deux roues avant, des deux roues arrière et des bras d'articulation **4** et **4'**. Pour chaque constituant de cet ensemble, la masse est supposée répartie uniformément.

Centre de gravité de Σ G tel que $\overrightarrow{C_1 G} = a_G \cdot \overrightarrow{z_1}$ $a_G = 85 \text{ mm}$	Masse de Σ $m_\Sigma = 152 \text{ kg}$	Matrice d'inertie de Σ en C_1 $I(C_1, \Sigma) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1} \right)}$ $A = 30,2 \text{ kg.m}^2$ $B = 8,2 \text{ kg.m}^2$ $C = 32,3 \text{ kg.m}^2$
--	--	---

- Roue droite ou gauche + axe de roue : R_{idoug} (i correspond au numéro du podo)

Centre de gravité de R_{idoug} C_{idoug} tel que l'entraxe $C_{ig} C_{id} = 2e$ $\overrightarrow{C_i C_{id}} = e \cdot \overrightarrow{x_L}$ et $\overrightarrow{C_i C_{ig}} = -e \cdot \overrightarrow{x_L}$ $e = 340 \text{ mm}$	Masse de R_{idoug} $m_r = 4 \text{ kg}$ Rayon d'une roue $R = 225 \text{ mm}$	Matrice d'inertie de R_{idoug} respectivement en C_{idoug} $I(C_{idoug}, R_{idoug}) = \begin{bmatrix} A_r & 0 & 0 \\ 0 & B_r & 0 \\ 0 & 0 & B_r \end{bmatrix}_{\left(\overrightarrow{x_L}, -, - \right)}$ Valable dans toute base orthonormée directe qui contient $\overrightarrow{x_L}$ $A_r = 0,1 \text{ kg.m}^2$ $B_r = 0,04 \text{ kg.m}^2$
--	--	---

- Axe des moteurs du podo central :

Les deux motoréducteurs centraux sont constitués chacun d'un moteur à courant continu alimenté en 48V associé à un réducteur épicycloïdal de rapport de réduction $k = +1/25$. La matrice d'inertie en C_1 d'un axe moteur droit M_{1d} ou gauche M_{1g} (en rotation suivant $(C_1, \overrightarrow{x_L})$) est :

$$I(C_1, M_{1d} \text{ ou } M_{1g}) = \begin{bmatrix} A_m & 0 & 0 \\ 0 & B_m & 0 \\ 0 & 0 & B_m \end{bmatrix}_{\left(\overrightarrow{x_L}, -, - \right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A_m = 795 \cdot 10^{-7} \text{ kg.m}^2 \\ B_m = 8 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2 \end{cases}$$

- Les masses et inerties des autres pièces seront négligées.

Modélisation du contact roue / sol :

- Les roues centrales R_{1d} et R_{1g} sont motrices, elles roulent sans glisser aux points de contact I_{1d} et I_{1g} . On pose

$\overrightarrow{C_{1d} I_{1d}} = -R \cdot \overrightarrow{z_L}$ et $\overrightarrow{C_{1g} I_{1g}} = -R \cdot \overrightarrow{z_L}$. Le contact avec le sol **0** est modélisé par le torseur suivant :

$$\{T(0 \rightarrow R_{1d})\}_{I_{1d}} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{0 \rightarrow R_{1d}}} = Y_{1d} \overrightarrow{y_L} + Z_{1d} \overrightarrow{z_L} \\ \overline{0} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{T(0 \rightarrow R_{1g})\}_{I_{1g}} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{0 \rightarrow R_{1g}}} = Y_{1g} \overrightarrow{y_L} + Z_{1g} \overrightarrow{z_L} \\ \overline{0} \end{Bmatrix}$$

- Les roues arrière R_{2d} et R_{2g} sont bloquées, leur vitesse de rotation par rapport au podo arrière **2** est nulle. Le contact avec le sol **0** est modélisé par le torseur suivant :

$$\{T(0 \rightarrow R_{2d})\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{0 \rightarrow R_{2d}} = T_{2d} \vec{n}_d + Z_{2d} \vec{z}_L \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{I_{2d}} \quad \text{et} \quad \{T(0 \rightarrow R_{2g})\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{0 \rightarrow R_{2g}} = T_{2g} \vec{n}_g + Z_{2g} \vec{z}_L \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{I_{2g}} \quad \text{avec}$$

\vec{n}_d et \vec{n}_g deux vecteurs unitaires opposés aux vitesses de glissement des roues R_{2d} et R_{2g} par rapport au sol 0 respectivement en I_{2d} et I_{2g} . On pose $\vec{C}_{2d} I_{2d} = -R \cdot \vec{z}_L$ et $\vec{C}_{2g} I_{2g} = -R \cdot \vec{z}_L$.

$T_{2d} = f \cdot Z_{2d}$ et $T_{2g} = f \cdot Z_{2g}$; f est le facteur de frottement constant au contact roue/sol; $f = 0,6$.

Autres liaisons :

Toutes les autres liaisons de la plate-forme sont supposées parfaites (sans jeu, sans frottement).

Motoréducteur centraux :

- L'action mécanique développée par le motoréducteur sur la roue centrale droite R_{1d} est notée :

$$\{T(\text{moteur} \rightarrow R_{1d})\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -C_m \vec{x}_L \end{array} \right\}_{C_1}$$

- L'action mécanique développée par le motoréducteur sur la roue centrale gauche R_{1g} est notée :

$$\{T(\text{moteur} \rightarrow R_{1g})\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m \vec{x}_L \end{array} \right\}_{C_1}$$

Q10: Justifier la forme de la matrice d'inertie de l'ensemble Σ au point C_1 dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

Dans un premier temps, l'objectif est de déterminer la somme des efforts normaux $Z_{2d} + Z_{2g}$ s'exerçant sur les roues arrière. Isolons l'ensemble de la plate-forme PF , soit l'ensemble Σ , les roues centrales et les motoréducteurs. Plaçons nous dans le plan médian $(C_1, \vec{y}_L, \vec{z}_L)$ de la plate-forme PF . Nous définissons le projeté I_1 des points de contact I_{1d} et I_{1g} dans ce plan. I_1 est défini par le vecteur: $\vec{C}_1 I_1 = -R \cdot \vec{z}_L$. D'autre part, nous avons $\vec{C}_2 I_1 = b \cdot \vec{y}_L - R \cdot \vec{z}_L$ et $\vec{C}_3 I_1 = -b \cdot \vec{y}_3 - R \cdot \vec{z}_L$. Nous ferons l'hypothèse que le moment dynamique $\overline{\delta}_{I_1}(PF/0) \cdot \vec{x}_L$ est négligeable devant les actions mécaniques.

Q11: En appliquant le théorème du moment dynamique à la plate-forme PF en mouvement par rapport au référentiel galiléen R_0 en I_1 en projection sur \vec{x}_L , déterminer l'expression littérale de la somme des efforts normaux de contact $Z_{2d} + Z_{2g}$, entre les roues arrière et le sol. Réaliser l'application numérique et comparer la valeur obtenue à la somme des efforts normaux s'exerçant sur les roues arrière lorsque la plate-forme est immobile en appui sur ses six roues sur un sol plan, à savoir $(Z_{2d} + Z_{2g})_{\text{Repos}} = (m_2 + 2m_r)g$ avec $m_2 = 52 \text{ kg}$ la masse du podé arrière 2.

L'objectif est dans un second temps de valider l'aptitude des moteurs à suivre la loi de vitesse en lacet exigée. Il est proposé de déterminer l'expression du couple moteur C_m par une approche énergétique.

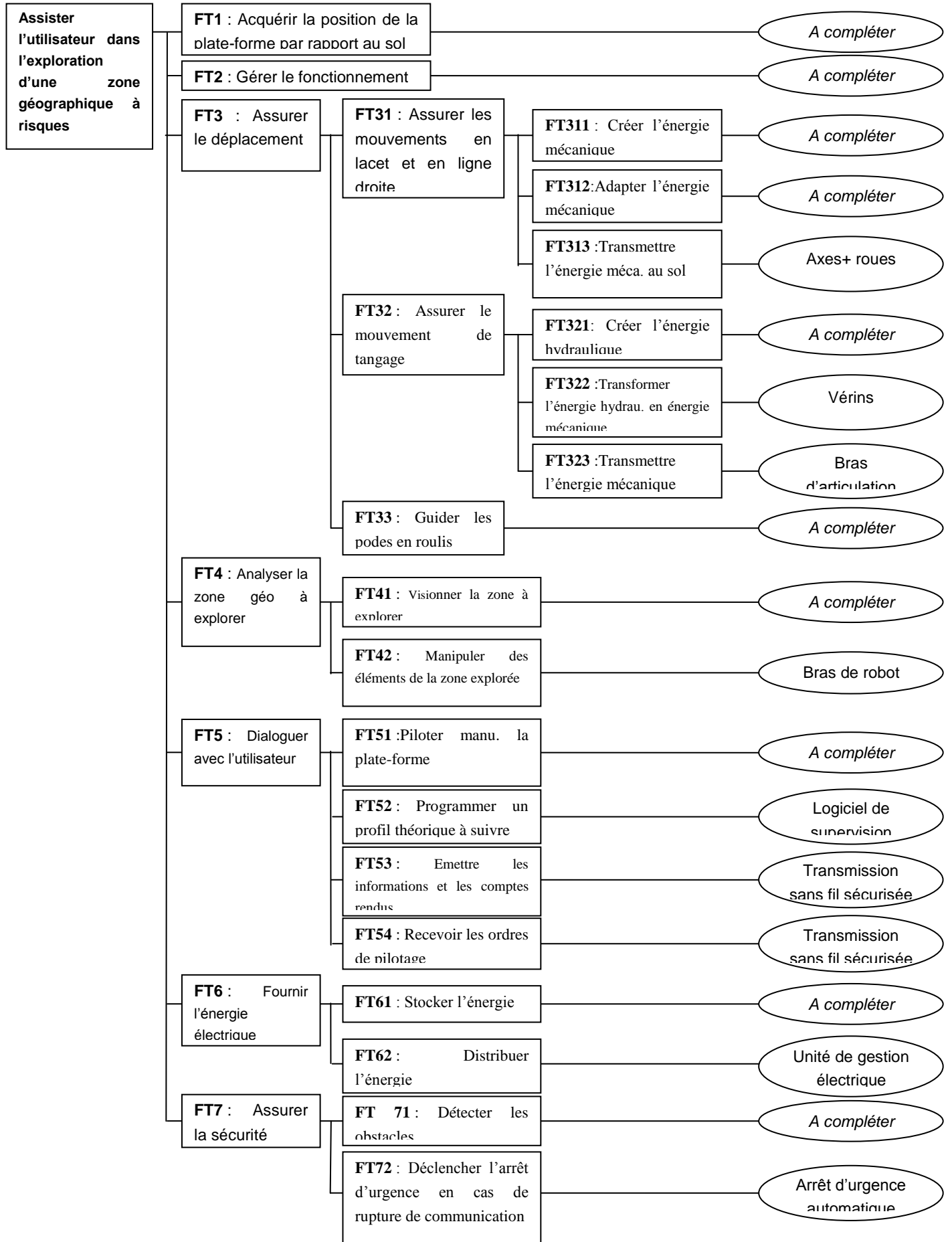
Q12: Déterminer l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble des solides en mouvement. Le résultat sera mis sous la forme $\frac{1}{2} \cdot J \cdot \dot{\varphi}^2$ où J est à exprimer sous forme littérale en fonction des données du problème.

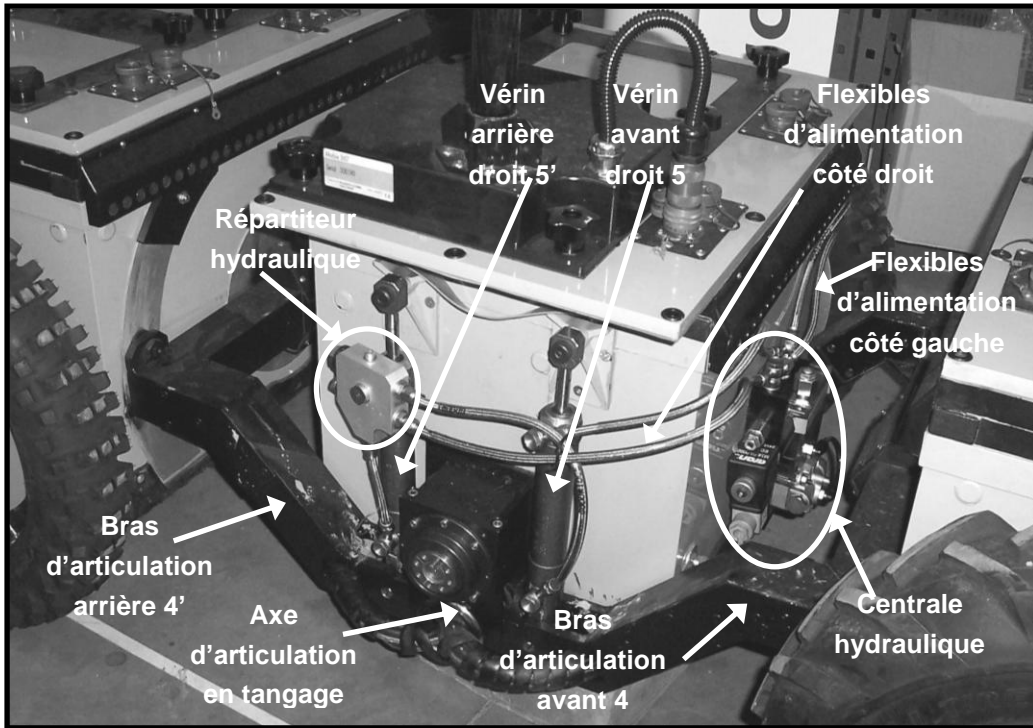
Q13: Mettre en œuvre le théorème de l'énergie cinétique afin de déterminer l'expression du couple moteur. Vous donnerez le résultat sous la forme $C_m = k_2 \cdot (J \cdot \ddot{\varphi} + k_1 \cdot (T_{2d} + T_{2g}))$ où k_1 et k_2 sont à exprimer sous forme littérale en fonction des données du problème. Vous veillerez à bien faire apparaître les différentes étapes de votre raisonnement et à fournir des expressions littérales.

Pour la **question 14**, vous prendrez $J = 34 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $k_1 = 0,65 \text{ m}$ et $k_2 = 1,3 \cdot 10^{-2}$ sans unité.

Q14: Calculer le couple moteur maximal : C_m maxi. A partir du graphe de fonctionnement du moteur (document-réponse **question 14**), conclure quand à l'aptitude de la motorisation à générer le mouvement de lacet désiré.

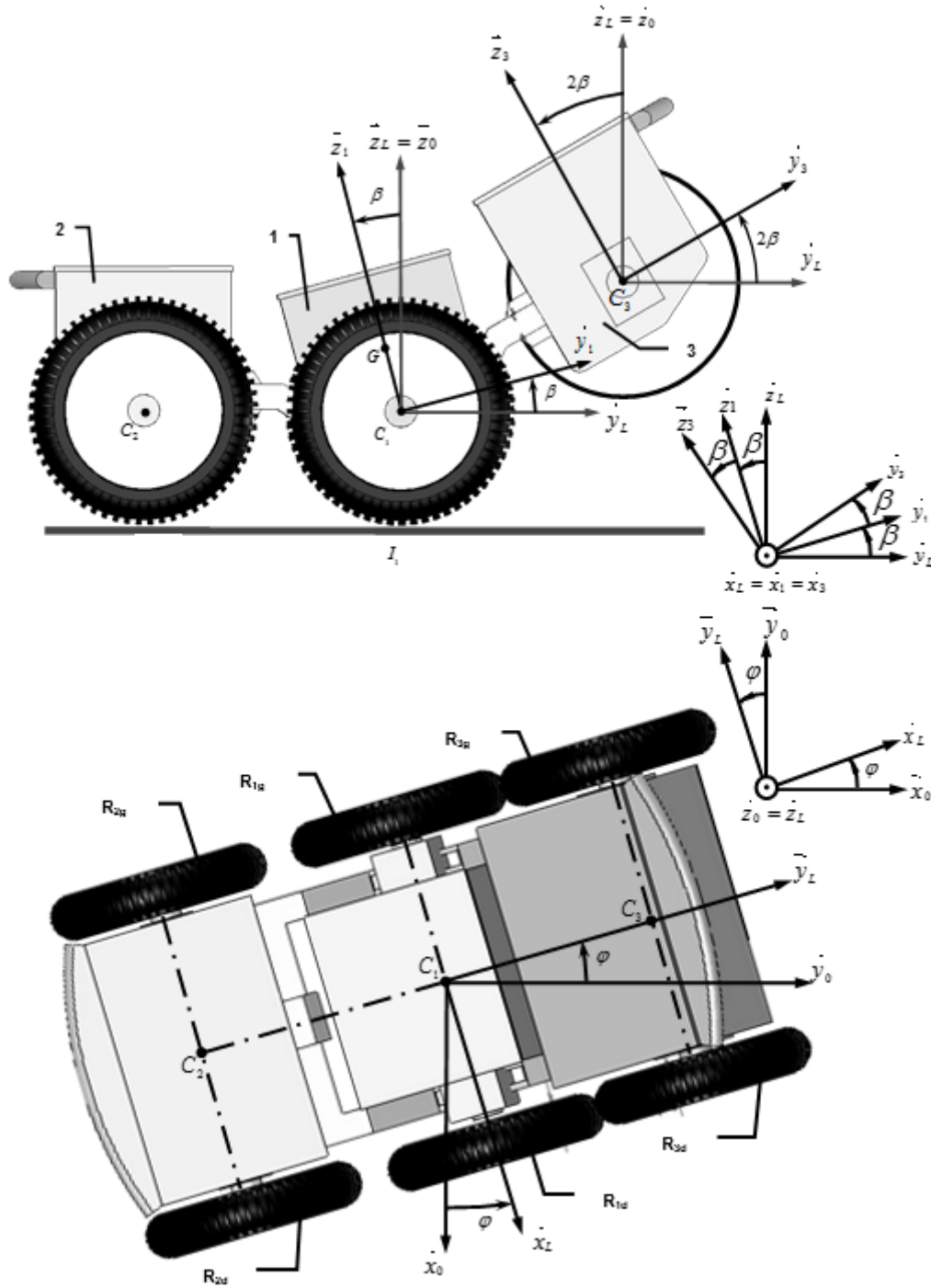
Annexe 1 : Diagramme FAST partiel de la plate-forme d'exploration





Annexe 2 : Description du circuit hydraulique complet (fixé sur le podé central 1)
(La roue centrale droite a été démontée pour faciliter la visibilité)

ETUDE DYNAMIQUE



Annexe 9 : Modélisation pour l'étude dynamique de la rotation de lacet