

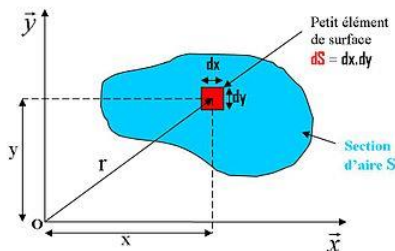


TD : Résistance des matériaux (torsion)

Rappel sur le moment quadratique:

Le **moment quadratique** est une grandeur qui caractérise la **géométrie d'une section** et se définit **par rapport à un axe ou un point**. Il s'exprime dans le système international en m^4 .

Le moment quadratique est utilisé en résistance des matériaux, il est indispensable pour **calculer la résistance et la déformation des poutres sollicitées en torsion (I_o) et en flexion (I_{Gz})**. En effet, la résistance d'une section sollicitée selon un axe donné varie avec son moment quadratique selon cet axe.

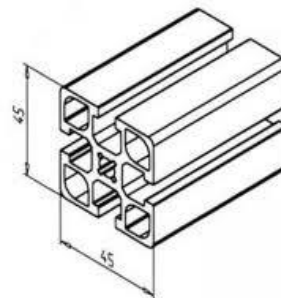


- Moment quadratique de la section S par rapport à l'axe $O\vec{x}$:
$$I_x = \int_S y^2 ds = \iint_S y^2 dx dy$$
- Moment quadratique de la section S par rapport à l'axe $O\vec{y}$:
$$I_y = \int_S x^2 ds = \iint_S x^2 dx dy$$
- Moment quadratique (polaire) de S par rapport au point O :
$$I_O = \int_S r^2 ds = \iint_S r^2 dx dy$$

Remarques
 On a $I_O = I_x + I_y$ puisque $r^2 = x^2 + y^2$ (Théorème de Pythagore).
 Il découle de ces définitions que plus les éléments de la section sont situés loin de l'axe, plus le moment quadratique sera important.

Moments quadratiques usuels:

| | | | | |
|------------------------|--------------------------|------------------|----------------------|------------------------------|
| | | | | |
| I_{Gz} (mm^4) | $\frac{bh^3}{12}$ | $\frac{a^4}{12}$ | $\frac{\pi d^4}{64}$ | $\frac{\pi (D^4 - d^4)}{64}$ |
| I_G (mm^4) | $\frac{bh^3 + hb^3}{12}$ | $\frac{a^4}{6}$ | $\frac{\pi d^4}{32}$ | $\frac{\pi (D^4 - d^4)}{32}$ |



Pour les profilés, cf doc constructeurs.

Transport du moment quadratique: (théorème de Huygens)

Le moment quadratique d'une section S dont le barycentre G passe par Δ' parallèle à l'axe de référence Δ à une distance d , vaut:

$$I_{\Delta'} = I_{\Delta G} + Sd^2$$

De même, le changement de point s'obtient ainsi:

$$I_O = I_G + S.(OG)^2$$

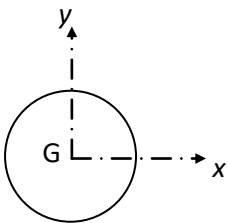
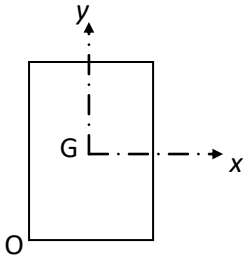
nota: $I_{Ox} = I_{Gx} + S*(OG_y)^2$, $I_{Oy} = I_{Gy} + S*(OG_x)^2$



TD : Résistance des matériaux (torsion)

Exercice n°1:

Pour les concours, il faut savoir rapidement redémontrer le calcul du moment quadratique pour un rectangle (h, b) et un cylindre (d):



Exercice n°2:

La section droite d'une poutre a la forme d'un U dissymétrique (Figure 1).
On donne les coordonnées du centre de surface G dans le repère O, x, y :

$$x_G = \frac{71}{22} e \quad ; \quad y_G = \frac{29}{22} e$$

1. Exprimer les éléments quadratiques en O : I_{Ox} , I_{Oy} , I_{Oxy} en fonction de e .
2. Quels sont les éléments quadratiques centraux I_{Gx} , I_{Gy} , I_{Gxy} en fonction de e .

$$h_1 = 3 e ; \quad h_2 = 4 e ; \quad b = 6 e ; \quad e = 1 \text{ cm}$$

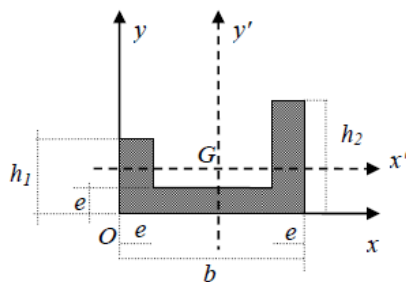


Figure 1.