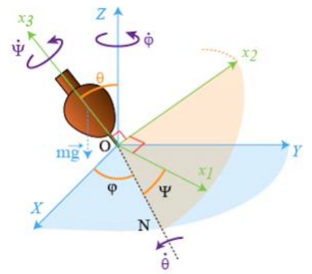
Cycle 3: Etude et modélisation des systèmes dynamiques à masse conservative

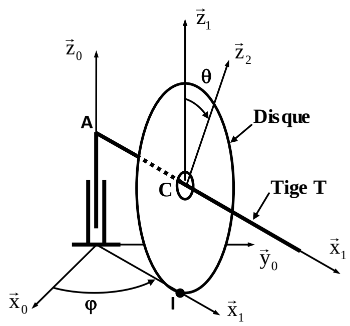
Chapitre 3 : Cinétique

$$E_c = \frac{1}{2}\, m \cdot v^2$$

joule (J) (kg) (m/s)

$$\{T_C(E/R)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_C}(E/R) = \int_{M \in E} \vec{V}(M/R)\,dm \\ \overrightarrow{\sigma_A}(E/R) = \int_{M \in E} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M/R)\,dm \end{array} \right\}_A$$





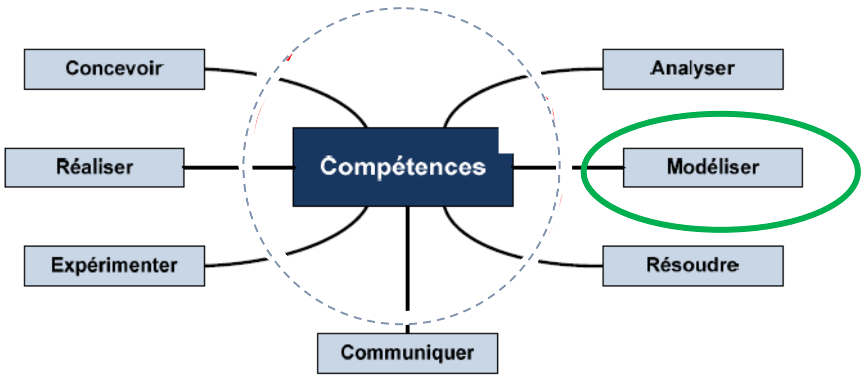
Problématique

Quels sont les éléments cinétique d'un solide et comment les déterminer ? Comment formaliser ces éléments par les torseurs cinétique et dynamique ? Comment déterminer l'inertie équivalente en rotation autour d'un axe ? Comment exprimer l'énergie cinétique d'un système de solides ?

Savoir

B. Modéliser:

- Ecrire les torseurs cinétique et dynamique d'un ensemble de solides par rapport à un repère
- Exprimer l'énergie cinétique d'un système de solides dans un repère



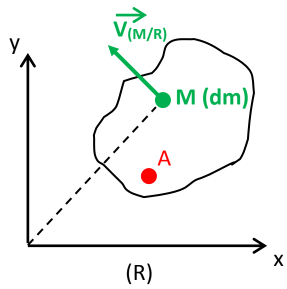
1. Eléments cinétiques d'un solide

On considère un système matériel E, à masse conservative m de centre d'inertie G, en mouvement par rapport à un repère R. Soit un point A pris arbitrairement.

1.1. Torseur cinétique d'un système matériel

Le torseur cinétique ou torseur des quantités de mouvement dans son mouvement par rapport à R est défini par :

$$\boxed{\{T_C(E/R)\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_C}(E/R) = \displaystyle\int_{M\in E} \vec{V}(M/R)\,dm \\ \overrightarrow{\sigma_A}(E/R) = \displaystyle\int_{M\in E} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M/R)\,dm \end{Bmatrix}_A}$$



$\mathrm{R_c}(\mathrm{E}/\mathrm{R})$ est la résultante cinétique ou quantité de mouvement de E par rapport à R ;

$\sigma_A(\mathrm{E}/\mathrm{R})$ est le moment cinétique en A de E dans son mouvement par rapport à R.

1.2. Torseur dynamique d'un système matériel

Le torseur dynamique ou torseur des quantités d'accélération de E dans son mouvement par rapport à un repère R est défini par :

$$\boxed{\{T_D(E/R)\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_D}(E/R) = \displaystyle\int_{M\in E} \vec{\Gamma}(M/R)\,dm \\ \overrightarrow{\delta_A}(E/R) = \displaystyle\int_{M\in E} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}(M/R)\,dm \end{Bmatrix}_A}$$

$\mathrm{R_D}(\mathrm{E}/\mathrm{R})$ est la résultante dynamique ou quantité d'accélération de E par rapport à R ;

$\delta_A(\mathrm{E}/\mathrm{R})$ est le moment dynamique en A de E dans son mouvement par rapport à R.

1.3. Energie cinétique d'un système matériel

L'énergie cinétique du système matériel E dans son mouvement par rapport à R est le scalaire suivant :

$$\boxed{\mathrm{T}(\mathrm{E}/\mathrm{R}) = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{E}} \left[\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{M}/\mathrm{R})\right]^2 \mathrm{dm}}$$ Unité : le Joule : $\boxed{\mathrm{J} = \mathrm{kg.m^2.s^{-2}}}$

Remarque : dans la suite du cours, on verra comment transformer les intégrales en produit matriciel.

2. Cas d'un solide

Considérons le cas ou le système matériel E est un **solide indéformable S** en mouvement par rapport au repère R. Soit O l'origine du repère R et G le centre d'inertie du solide S.

2.1. Résultante cinétique et résultante dynamique

En utilisant le principe de conservation de la masse on peut écrire :

$$\overrightarrow{R_C}(S/R) = \int_{M\in S} \vec{V}(M/R)dm = \int_{M\in S} \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}\right)_R dm = \left(\frac{d}{dt}\int_{M\in S}\overrightarrow{OM}\,dm\right)_R = m\left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{OG}\right)_R$$

On en déduit :

$$\boxed{\overrightarrow{R_C}(S/R) = m\vec{V}\left(G/R\right)}$$

Ce qui signifie que la quantité de mouvement d'un solide est égale à celle de son centre d'inertie affecté de la masse totale de l'ensemble.

De la même façon on montre que :

$$\boxed{\overrightarrow{R_D}(S/R) = m\vec{\Gamma}\left(G/R\right)}$$

Ce qui signifie que la quantité d'accélération d'un ensemble matériel est égale à celle de son centre d'inertie affecté de la masse totale de l'ensemble.

On peut donc en déduire que la résultante dynamique est la dérivée de la résultante cinétique :

$$\boxed{\overrightarrow{R_D}(S/R) = \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{R_C}(S/R)\right)_R}$$

2.2. Moment cinétique et moment dynamique

2.2.1. Moment cinétique

Dans le cas ou le système matériel E est un solide indéformable S, $\vec{V}(M/R) = \vec{V}(M \in S/R)$ et le champ des vitesses peut être décrit par un torseur cinématique. On peut donc écrire la relation suivante dans laquelle le point A est quelconque :

$$\vec{V}(M/R) = \vec{V}(M \in S/R) = \vec{V}(A \in S/R) + \overrightarrow{MA} \wedge \vec{\Omega}(S/R) \quad \text{(Varignon)}$$

En la remplaçant dans l'expression initiale du moment cinétique, il vient :

$$\overrightarrow{\sigma_A}(S/R) = \int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \left(\vec{V}(A \in S/R) + MA \wedge \vec{\Omega}(S/R)\right)dm$$

$$= \int_{M\in S} \overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}(A\in S/R)dm + \underbrace{\int_{M\in S} \overrightarrow{AM}\wedge\left(\overrightarrow{MA}\wedge\vec{\Omega}(S/R)\right)dm}_{\left[I(A,S)\right]\vec{\Omega}(S/R)}$$

$$= \underbrace{\int_{M\in S} \overrightarrow{AM}\,dm}_{m\overrightarrow{AG}}\wedge\vec{V}(A\in S/R)+\left[I\left(A,S\right)\right]\vec{\Omega}(S/R)$$

$$= m\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}(A\in S/R)+\left[I\left(A,S\right)\right]\vec{\Omega}(S/R)$$

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_A}(S/R)=\left[I\left(A,S\right)\right]\vec{\Omega}(S/R)+m\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}(A\in S/R)}$$

Cas particuliers :

- ✓ Si le point **A est confondu avec le centre d'inertie G**, alors :

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_G}(S/R)=\left[I\left(G,S\right)\right]\vec{\Omega}(S/R)}$$

- ✓ Si le point **A est un point fixe de R**, alors :

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_A}(S/R)=\left[I\left(A,S\right)\right]\vec{\Omega}(S/R)}$$

Pour déterminer le moment cinétique en un point quelconque B, il suffit d'appliquer la relation liant les moments d'un torseur (Varignon):

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_B}\left(S/R\right)=\overrightarrow{\sigma_A}\left(S/R\right)+\overrightarrow{BA}\wedge m\vec{V}(G/R)}$$

2.2.2. Relation entre moment cinétique et moment dynamique

En dérivant l'expression du moment cinétique, on obtient :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_A}\left(S/R\right)}{dt}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\int_{M\in S}\overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}\left(M/R\right)dm\right]_R = \int_{M\in S}\left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}(M/R)\,dm\right)\right]_R$$

$$= \int_{M\in S}\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AM}\right]_R\wedge\vec{V}(M/R)\,dm + \int_{M\in S}\overrightarrow{AM}\wedge\underbrace{\left[\frac{d}{dt}\vec{V}(M/R)\right]_R}_{\vec{\Gamma}(M/R)}dm$$

$$= \int_{M\in S}\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AO}+\frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}\right]_R\wedge\vec{V}(M/R)\,dm + \underbrace{\int_{M\in S}\overrightarrow{AM}\wedge\vec{\Gamma}(M/R)\,dm}_{\overrightarrow{\delta_A}(S/R)}$$

$$= \int_{M\in S} \left(-\vec{V}(A/R)+\vec{V}(M/R)\right)\wedge\vec{V}(M/R)\;dm+\vec{\delta_A}(S/R)=\int_{M\in S} -\vec{V}(A/R)\wedge\vec{V}(M/R)\;dm+\vec{\delta_A}(S/R)$$

$$=-\vec{V}(A/R)\wedge\underbrace{\int_{M\in S}\vec{V}(M/R)\;dm}_{m\vec{V}(G/R)}+\vec{\delta_A}(S/R)=-\vec{V}(A/R)\wedge m\vec{V}(G/R)+\vec{\delta_A}(S/R)$$

On en déduit :

$$\boxed{\vec{\delta_A}(S/R)=\left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma_A}(S/R)\right]_R+\vec{V}(A/R)\wedge m\vec{V}(G/R)}$$

Attention : on devra utiliser la relation suivante si nécessaire :

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma_A}(S/R)\right]_R=\left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma_A}(S/R)\right]_{R_1}+\vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\vec{\sigma_A}(S/R)$$

<u>Cas particuliers</u> :

- ✓ Si le point **A est confondu avec le centre d'inertie G**, alors :

$$\boxed{\vec{\delta_G}(S/R)=\frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma_G}(S/R)\right]_R}$$

- ✓ Si le point **A est un point fixe de R**, alors :

$$\boxed{\vec{\delta_A}(S/R)=\frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma_A}(S/R)\right]_R}$$

- ✓ Si $\vec{V}(A/R)$ et $\vec{V}(G/R)$ sont parallèles, alors :

$$\boxed{\vec{\delta_A}(S/R)=\frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma_A}(S/R)\right]_R}$$

Remarque : Pour déterminer le moment dynamique en un point quelconque B, il suffit d'appliquer la relation liant les moments d'un torseur (Varignon):

$$\boxed{\vec{\delta_B}(S/R)=\vec{\delta_A}(S/R)+\vec{BA}\wedge m\vec{\Gamma}(G/R)}$$

2.2.3. Projection du moment dynamique sur un axe

Il arrive fréquemment, dans les problèmes de mécanique, que l'on ait besoin que de la **projection du moment dynamique sur un axe**. Soit $(A,\vec{u})$ cet axe. La projection du moment dynamique s'écrit :

$$\vec{u}.\overrightarrow{\delta_A}(S/R)=\vec{u}.\left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_A}(S/R)}{dt}\right]_R+\vec{u}.\vec{V}(A/R)\wedge m\vec{V}(G/R)$$

Or : $$\boxed{\vec{u}.\left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_A}(S/R)}{dt}\right]_R=\left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_A}(S/R).\vec{u}}{dt}\right]_R-\overrightarrow{\sigma_A}(S/R).\left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_R}$$

Donc :

$$\vec{u}.\overrightarrow{\delta_A}(S/R)=\left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_A}(S/R).\vec{u}}{dt}\right]_R-\overrightarrow{\sigma_A}(S/R).\left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_R+\vec{u}.\vec{V}(A/R)\wedge m\vec{V}(G/R)$$

Cette expression se simplifie si on prend G en A, ou A point de vitesse nulle, ou en projetant sur un axe fixe. Mais dans tous les cas il n'y a pas à calculer d'accélérations.

3. Energie cinétique

Comme nous l'avons déjà vu, dans le cas où le système matériel E est un solide indéformable S, le champ des vitesses peut être décrit par un torseur cinématique :

$$\vec{V}(M\in S/R)=\vec{V}(A\in S/R)+MA\wedge\vec{\Omega}(S/R)$$

En remplaçant la relation précédente dans l'expression de l'énergie cinétique, il vient :

$$T(S/R)=\frac{1}{2}\int_{M\in S}\left[\vec{V}(M\in S/R)\right]^2dm=\frac{1}{2}\int_{M\in S}\left[\vec{V}(A\in S/R)+MA\wedge\vec{\Omega}(S/R)\right]^2dm$$

$$T(S/R)=\frac{1}{2}\int_{M\in S}\left[\vec{V}(A\in S/R)+MA\wedge\vec{\Omega}(S/R)\right].\left[\vec{V}(M\in S/R)\right]dm$$

$$=\frac{1}{2}\int_{M\in S}\left[\vec{V}(A\in S/R)\right].\left[\vec{V}(M\in S/R)\right]dm+\int_{M\in S}\left[MA\wedge\vec{\Omega}(S/R)\right].\vec{V}(M\in S/R)dm$$

$$=\frac{1}{2}\vec{V}(A\in S/R).\underbrace{\int_{M\in S}\vec{V}(M\in S/R)dm}_{m\vec{V}(G\in S/R)}+\vec{\Omega}(S/R).\underbrace{\int_{M\in S}\overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}(M\in S/R)dm}_{\overrightarrow{\sigma_A}(S/R)}$$

On en déduit l'expression de l'énergie cinétique :

$$\boxed{T(S/R)=\underbrace{\frac{1}{2}m\vec{V}(A\in S/R).\vec{V}(G\in S/R)}_{\text{Energie cinétique de translation}}+\underbrace{\frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R).\overrightarrow{\sigma_A}(S/R)}_{\text{Energie cinétique de rotation}}}$$

Cette expression est aussi le **comoment du torseur cinématique et du torseur cinétique** :

$$\boxed{T(S/R)=\frac{1}{2}\underbrace{\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}(S/R)\\ \vec{V}(A\in S/R)\end{Bmatrix}_A}_{\text{Torseur cinématique}}\otimes\underbrace{\begin{Bmatrix}m\vec{V}(G\in S/R)\\ \vec{\sigma}_A(S/R)\end{Bmatrix}_A}_{\text{Torseur cinétique}}}$$

<u>Cas particuliers :</u>

- ✓ Si le point **A est confondu avec le centre d'inertie G**, alors :

$$\boxed{T(S/R)=\frac{1}{2}m\vec{V}^2(G\in S/R)+\frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R).\left[I(G,S)\right]\vec{\Omega}(S/R)}$$

- ✓ Si le point **A est un point fixe de R**, alors :

$$\boxed{T(S/R)=\frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R).\left[I(A,S)\right]\vec{\Omega}(S/R)}$$

- ✓ Si le solide S est animé d'un **mouvement de rotation** autour de l'axe $(O,\vec{z})$ du repère R.

  On pose : $I_{(O,\vec{z})}$ moment d'inertie du solide S par rapport à l'axe $(O,\vec{z})$ et $\vec{\Omega}(S/R)=\omega\vec{z}$, alors :

$$\boxed{T(S/R)=\frac{1}{2}I_{(O,\vec{z})}\omega^2}$$

- ✓ Si le solide S est animé **d'un mouvement plan**, dans le plan $(O,\vec{x},\vec{y})$ du repère R.

  On pose : $I_{(O,\vec{z})}$ moment d'inertie du solide S par rapport à l'axe $(O,\vec{z})$ et $\vec{\Omega}(S/R)=\omega\vec{z}$, alors :

$$\boxed{T(S/R)=\frac{1}{2}m\vec{V}^2(G\in S/R)+\frac{1}{2}I_{(O,\vec{z})}\omega^2}$$

L'énergie cinétique ne dépend pas du point de calcul, il est donc toujours intéressant de la calculer en un point avec des propriétés simplificatrices.

Eléments cinétiques d'un ensemble de solide

Soit E un système constitué de n solides Si en mouvement par rapport au repère R. Pour déterminer les éléments cinétiques du système E, on procède généralement en calculant ces éléments pour chacun des solides, puis on effectue ensuite leur somme en prenant la précaution, dans le cas des moments cinétiques et dynamiques, de les **réduire en un même point.**

Remarque : le point A n'est pas forcément un point de E, mais ce point n'est ni G, ni un point fixe.

1. Torseur cinétique

$$\boxed{\left\{Tc(E/R)\right\} = \sum_{i=1}^{n}\left\{Tc(E/R)\right\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R_c}(E/R) = \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{R_c}(S_i/R) = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}(G_i \in S_i/R) = m\vec{V}(G_E/R) \\ \overrightarrow{\sigma_A}(E/R) = \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{\sigma_A}(S_i/R) \end{array}\right\}_A}$$

2. Torseur dynamique

$$\boxed{\left\{Td(E/R)\right\} = \sum_{i=1}^{n}\left\{Td(S_i/R)\right\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R_d}(E/R) = \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{R_d}(S_i/R) = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\Gamma}(G_i \in S_i/R) = m\vec{\Gamma}(G_E/R) \\ \overrightarrow{\delta_A}(E/R) = \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{\delta_A}(S_i/R) \end{array}\right\}_A}$$

3. Energie cinétique

$$\boxed{T(E/R) = \sum_{i=1}^{n} T(S_i/R)}$$

Méthodes de résolution

Supposons $\left[I(G,S)\right]$ la matrice d'inertie du solide S de masse m, de centre d'inertie G.

Objectif : déterminer le moment dynamique au point A du solide S : $\overrightarrow{\delta_A}(S/R)$

$$\begin{tikzcd}
\left[I(G,S)\right] \arrow[r, "\textbf{(5)}"] \arrow[d, "\textbf{(1)}"'] & \left[I(A,S)\right] \arrow[d, "\textbf{(6)}"'] \\
\overrightarrow{\sigma_G}(S/R) \arrow[r, "\textbf{(4)}"'] \arrow[d, "\textbf{(2)}"'] & \overrightarrow{\sigma_A}(S/R) \arrow[d, "\textbf{(7)}"'] \\
\overrightarrow{\delta_G}(S/R) \arrow[r, "\textbf{(3)}"'] & \overrightarrow{\delta_A}(S/R)
\end{tikzcd}$$

Les différentes façons d'arriver au résultat final sont indiquées sur le schéma ci-contre :

Les relations de passage sont les suivantes :

$$\begin{cases}
(1)\ \overrightarrow{\sigma_G}(S/R)=\left[I(G,S)\right]\overrightarrow{\Omega}(S/R) \\
(2)\ \overrightarrow{\delta_G}(S/R)=\dfrac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\sigma_G}(S/R)\right]_R \\
(3)\ \overrightarrow{\delta_A}(S/R)=\overrightarrow{\delta_G}(S/R)+\overrightarrow{AG}\wedge m\overrightarrow{\Gamma}(G/R)
\end{cases}$$

$$(4)\ \overrightarrow{\sigma_A}(S/R)=\overrightarrow{\sigma_G}(S/R)+\overrightarrow{AG}\wedge m\overrightarrow{V}(G/R)$$

$$(5)\ \left[I(A,S)\right]=\left[I(G,S)\right]+m\begin{pmatrix} \left(y_G^2+z_G^2\right) & -x_Gy_G & -x_Gz_G \\ -x_Gy_G & \left(x_G^2+z_G^2\right) & -y_Gz_G \\ -x_Gz_G & -y_Gz_G & \left(x_G^2+y_G^2\right) \end{pmatrix}_{B(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Avec $\overrightarrow{AG}=x_G\ \vec{x}+y_G\ \vec{y}+z_G\ \vec{z}$

$$(6)\ \overrightarrow{\sigma_A}(S/R)=\left[I(A,S)\right]\overrightarrow{\Omega}(S/R)+m\overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{V}(A\in S/R)$$

$$(7)\ \overrightarrow{\delta_A}(S/R)=\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_A}(S/R)\right]_R+\overrightarrow{V}(A/R)\wedge m\overrightarrow{V}(G/R)$$

<u>Stratégie</u> : il est conseillé d'utiliser le chemin **(1)-(2)-(3)**

Inertie équivalente en rotation autour d'un axe

Définition :

Dans le cas d'un système comportant plusieurs pièces en révolution à des vitesses de rotation différentes (et éventuellement certaines en translation), on appelle inertie équivalente ramenée à un axe Δ, l'inertie $\mathbf{I_{éq\Delta}}$ que devrait avoir cet axe en rotation pour que l'énergie cinétique totale du système de pièces en rotation soit égale à :

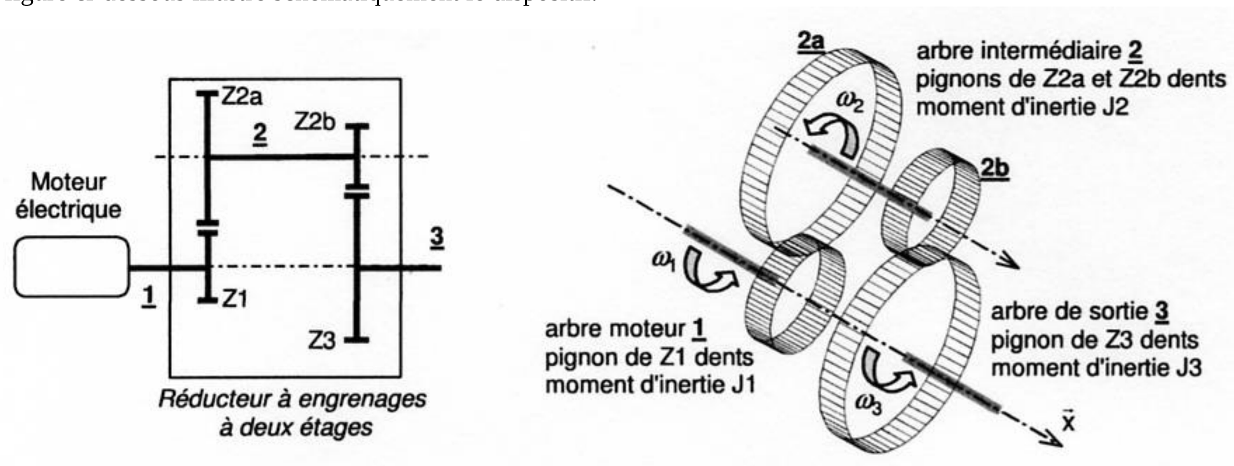
$$T\left(S/R\right)=\frac{1}{2}I_{éq\Delta}\omega_{\Delta}^{2}$$

ω_{Δ} : vitesse de rotation de l'axe Δ

Intérêt : l'inertie équivalente ramenée à l'axe moteur permet d'estimer rapidement le dimensionnement de l'actionneur.

Exemple 1 :

On considère un réducteur à engrenages à deux étages comportant un pignon d'entrée moteur **1**, un arbre intermédiaire **2** avec deux pignons de $\mathbf{Z_{2a}}$ et $\mathbf{Z_{2b}}$ dents et un arbre de sortie **3** avec un pignon de $\mathbf{Z_3}$ dents. Les différents arbres (**1**, **2**, **3**) sont en liaison pivot d'axe $\vec{x}$ par rapport au bâti **0** (non représenté sur la perspective).
La figure ci-dessous illustre schématiquement le dispositif.



L'engrènement des pignons **1** et **2a** d'une part, et **2b** et **3** d'autre part, permet d'écrire :

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}=-\frac{Z1}{Z2a}=-\frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_3}{\omega_2}=-\frac{Z2b}{Z3}=-\frac{1}{\mu}$$

Si on estime l'énergie cinétique de l'ensemble à un instant donné par rapport au référentiel galiléen lié au bâti :

$$T\left(\left(1+2+3\right)/0\right)=\frac{1}{2}J_1\omega_1^2+\frac{1}{2}J_2\omega_2^2+\frac{1}{2}J_3\omega_3^2=\frac{1}{2}\omega_1^2(J_1+J_2\frac{1}{\lambda^2}+J_3\frac{1}{\lambda^2}\frac{1}{\mu^2})=\frac{1}{2}J_{éq}\,\omega_1^2$$

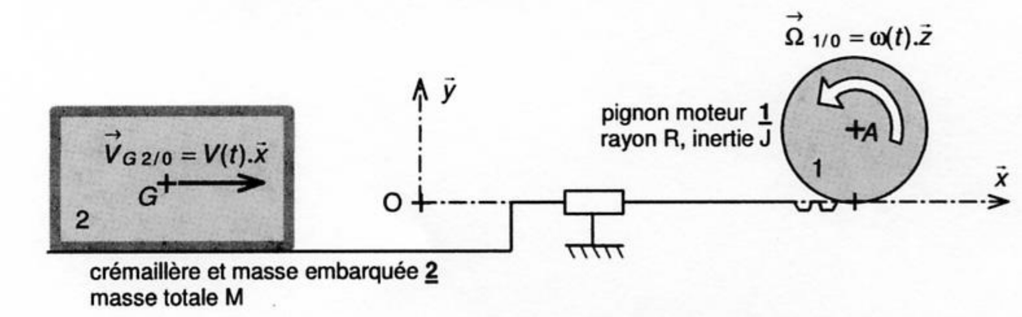
L'inertie équivalente ramenée à l'axe moteur est donc : $\boxed{J_{eq}=(J_1+J_2\frac{1}{\lambda^2}+J_3\frac{1}{\lambda^2}\frac{1}{\mu^2})}$

Exemple 2 :

On considère un dispositif d'entraînement en translation d'une table supportant une charge embarquée (supposée liée à la table **2**).
La table est en liaison glissière sans frottement par rapport au bâti **0** et en liaison pignon crémaillère avec le pignon moteur **1**.

La figure ci-dessous illustre schématiquement le dispositif.

La transmission par pignon crémaillère impose à tout instant : $V(t) = R.\omega(t)$



Si on estime l'énergie cinétique de l'ensemble à un instant donné par rapport au référentiel galiléen lié au bâti :

$$T\big((1+2+3)/0\big) = \frac{1}{2}J\omega_1^2 + \frac{1}{2}M\,V^2 = \frac{1}{2}\omega_1^2(J + M\,R^2) = \frac{1}{2}J_{éq}\,\omega_1^2$$

L'inertie équivalente ramenée à l'axe moteur est donc : $\boxed{J_{eq} = (J + M\,R^2)}$