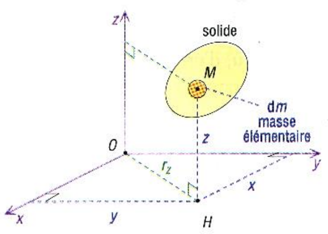
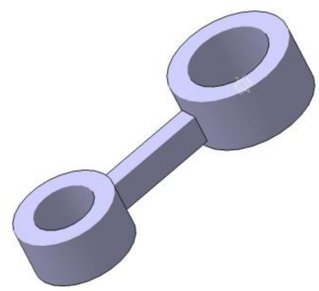
<u>Cycle 3:</u> Etude et modélisation des systèmes dynamiques à masse conservative

<u>Chapitre 2</u> : Caractéristiques d'inertie des solides
Principe de conservation de la masse



$$\left[I(O,S)\right]=\begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_B$$



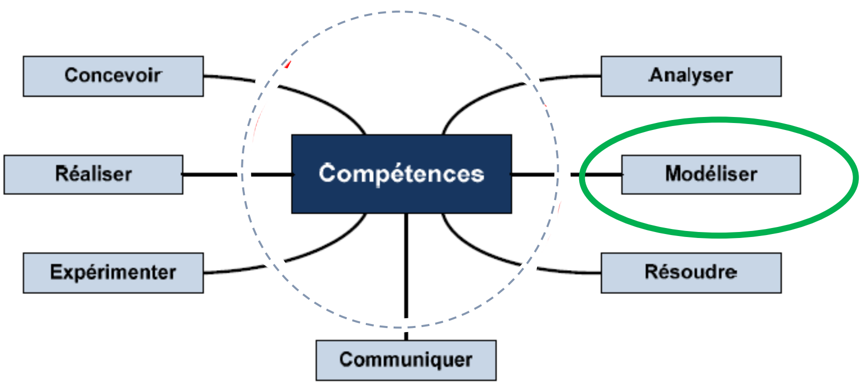
Problématique

Qu'est ce qu'un système à masse conservative ? Comment déterminer les caractéristiques d'inertie d'un solide ? Comment représenter un opérateur d'inertie ?

Savoir

B. Modéliser:

- Connaître la forme de la matrice d'inertie d'un solide
- Savoir simplifier une matrice d'inertie d'un solide ayant des particularités physiques (symétrie…)
- Utiliser un modeleur volumique 3D pour déterminer la masse et la matrice d'inertie d'un solide

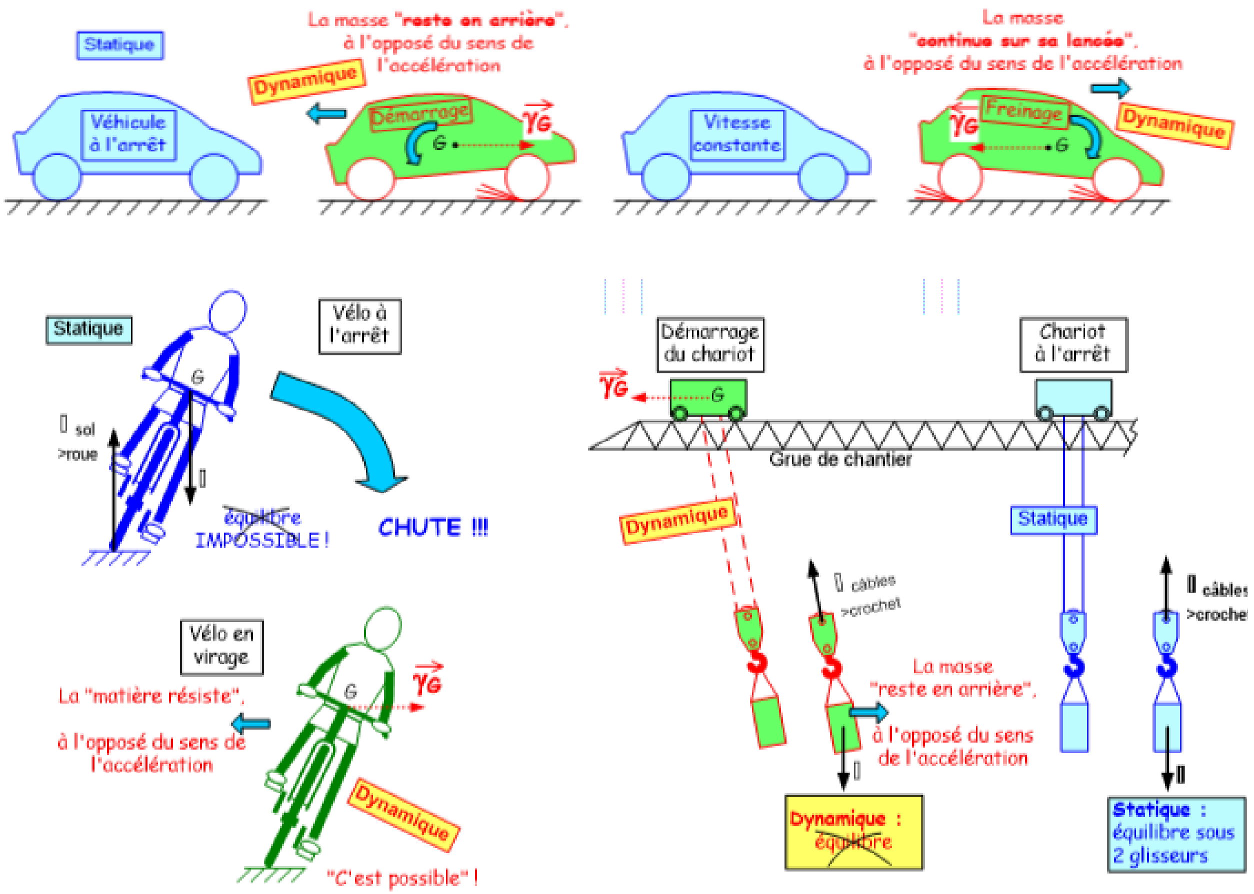


1. Principe des effets dynamiques

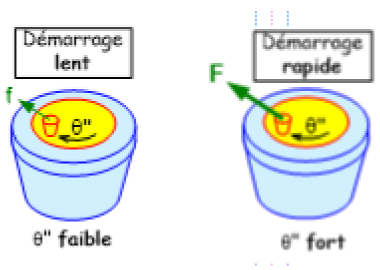
En PTSI, nous avons étudié indépendamment les vitesses et accélérations de point appartenant à des solides indéformables = CINEMATIQUE et les efforts appliqués à ces mêmes solides sans mouvement = STATIQUE.

La dynamique (du grec *dynamikos*, puissant, efficace) est une discipline de la mécanique classique qui étudie **les corps en mouvement sous l'influence des actions mécaniques** qui leur sont appliquées. Elle combine la statique qui étudie l'équilibre des corps au repos, et la cinématique qui étudie le mouvement.

Voici quelques exemples d'effets dynamiques :

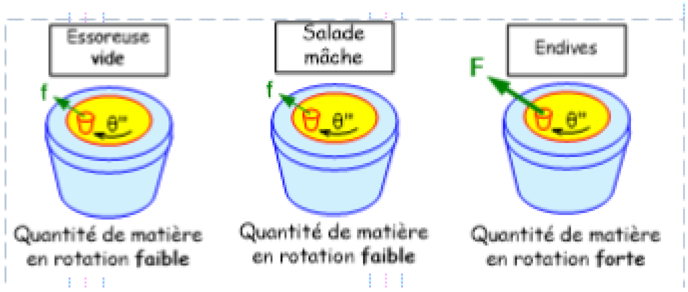


2. Notions d'inertie



L'action tangentielle sur la poignée est **plus forte** si l'**accélération angulaire est forte**.

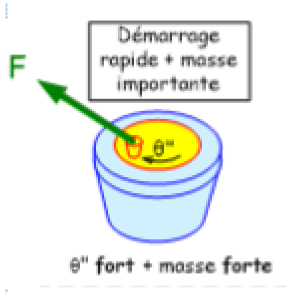
Si le démarrage est très lent, l'effort appliqué sert très peu à accélérer le mouvement ; simplement à vaincre, en particulier, le couple de frottement du panier dans la cuve.



L'**action tangentielle** sur la poignée est **plus forte** si la **masse** contenue dans le panier est **importante.**

Mais si le démarrage est très, très lent, l'influence de la masse se fait peu sentir.

En revanche, "dur, dur" ici, → où **masse** et **accélération** se "liguent" contre le cuisinier !



De quoi dépend l'INERTIE ?	⇨ de la **MASSE de matière** et de la **RÉPARTITION de matière**

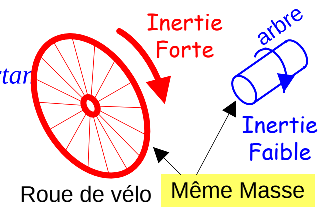
⇨ **<u>MASSE de matière :</u>**

<u>Exemple 1 :</u> Vélo et moto

*A vitesses égales, il est plus facile de **ralentir** un vélo qu'une moto (ralentir = diminuer la norme de la vitesse)*

<u>Exemple 2 :</u> Comparaison de roues de vélo cyclotouriste / VTT

*Il faut un **moment** plus important pour lancer la 2ème (à diamètre égal sa masse est plus importan*



ð **<u>RÉPARTITION de matière :</u>**

*<u>Exemple 3 :</u> Roue de vélo / arbre de **même masse** et de faible diamètre*

*Le **moment** nécessaire pour lancer la roue est plus important que celui nécessaire pour lancer l'arbre.*
*Pour la roue la matière est répartie différemment, beaucoup plus loin de l'axe de rotation → **inertie** plus forte.*

3. <u>Notions de masse</u>

La masse « m » d'un système matériel représente la quantité de matière dont il est constitué.
Un point matériel « M » est un point de l'espace affecté d'une masse « m ».
Les systèmes matériels étudiés dans ce cours peuvent être caractérisés :

- ✓ soit par un nombre fini « n » de points matériels M_i de masse respectives m_i (système matériel discret) ;

$$\boxed{m(S) = \sum_{i=1}^{n} m_i}$$

✓ soit par une répartition continue de masses (système matériel continu) ;

$$\boxed{m(S) = \int_S dm}$$

Pour un volume matériel, une surface matérielle ou une ligne matérielle on obtient :

$$\boxed{m(\Delta) = \iiint_\Delta \mu(M)dv} \qquad \boxed{m(\Sigma) = \iint_\Sigma \mu(M)ds} \qquad \boxed{m(\Gamma) = \int_\Gamma \mu(M)dl}$$

$\mu(M)$ représente une masse volumique dans le cas du volume matériel Δ, une masse surfacique dans le cas de la surface matérielle Σ et une masse linéique dans le cas de la ligne matérielle Γ.

<u>Conservation de la masse :</u>

*Un système matériel S (solide, fluide,…) est **à masse conservative** si celle-ci reste constante au cours du temps ; à la fois pour S et pour n'importe quelle partie de S. En mécanique classique, on admet que la masse est une constante indépendante du temps.*

4. Caractéristiques d'inertie pour un solide

<u>Attention</u> : centre d'inertie = centre de masse (= centre de gravité)

4.1. Définition

Pour un système matériel (S) de masse strictement positive m(S), à l'instant t donné, il existe un point G et un seul, appelé centre d'inertie de (S) à l'instant t, tel que:

✓ pour un système à structure discrète, constituée de points M_i de masse m_i :

$$\boxed{m(S)\ \overrightarrow{AG} = \sum_{i=1}^{n} m_i\ \overrightarrow{AM_i}} \text{ avec } \boxed{m(S) = \sum_{i=1}^{n} m_i}$$ et A point de l'espace arbitrairement choisi.

✓ pour un système à structure continue, constituée de points M de masse dm :

$$\boxed{m(S)\ \overrightarrow{AG} = \int_S \overrightarrow{AM}\ dm}\ (1) \qquad \text{avec } \boxed{m(S) = \int_S dm}$$ et A point de l'espace arbitrairement choisi.

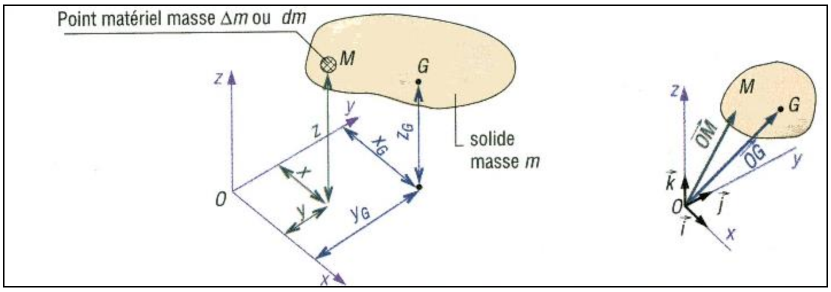
Si A = G, alors $\boxed{\int_S \overrightarrow{GM}\ dm = \vec{0}}$

Si l'on considère un solide indéformable, on montre, en dérivant l'expression (1), que $\boxed{\overrightarrow{V_{G/S}} = \vec{0}}$.
Ce qui signifie que le centre d'inertie d'un solide indéformable est un point fixe du solide.

4.2. Détermination du centre d'inertie

4.2.1. Position du centre d'inertie

M est un point matériel de masse dm appartenant au solide (S) de masse m.



$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{x} + y\,\vec{y} + z\,\vec{z} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OG} = x_G\,\vec{x} + y_G\,\vec{y} + z_G\,\vec{z}$$

G étant un point fixe du solide indéformable (S) et la position du centre d'inertie étant définie par la relation :

$$m(S)\ \overrightarrow{OG} = \int_S \overrightarrow{OM}\ dm \quad \text{ou} \quad V(S).\ \overrightarrow{OG} = \int_S \overrightarrow{OM}.dV$$

On obtient :

$$m\ x_G = \int_S x\ dm \qquad m\ y_G = \int_S y\ dm \qquad m\ z_G = \int_S z\ dm$$

4.2.2. Position du centre d'inertie des solides composés

Si un solide (S) peut se partager en n solides (Si), géométriquement simples, de masse m_i et de centre de masse G_i connus, le centre d'inertie G de (S) se détermine à partir de la relation :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(m_i \overrightarrow{OG_i} \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \right) \overrightarrow{OG}$$

Attention le centre d'inertie d'un système déformable de solides est mobile.

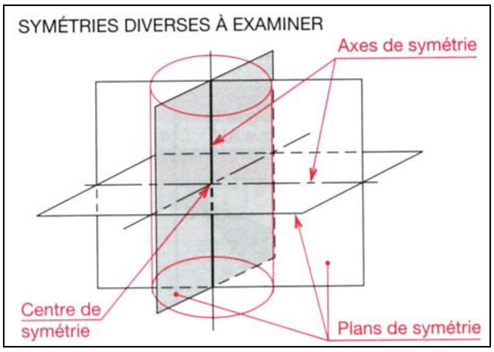
4.2.3. Symétrie matérielle

La recherche du centre de gravité se trouve facilitée dans de nombreux cas :

Quand un solide (S) homogène présente :
- ✓ un plan de symétrie, ou
- ✓ un axe de symétrie, ou
- ✓ un centre de symétrie

alors son centre d'inertie G se situe, respectivement :
- ✓ dans le plan de symétrie, ou
- ✓ sur l'axe de symétrie, ou
- ✓ au centre de symétrie

Attention, la symétrie doit être non seulement géométrique mais aussi massique.



4.2.4. Technique de calcul

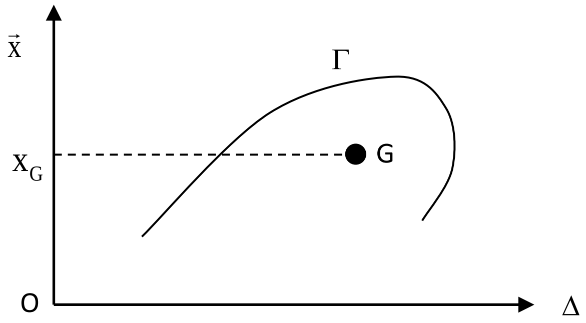
Voir calcul des intégrales multiples

Théorèmes de GULDIN:

Les théorèmes de GULDIN permettent de déterminer la position du centre d'inertie d'une ligne ou d'une surface plane.

Théorème n°1:

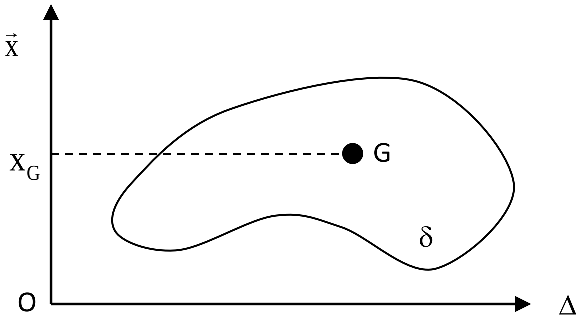
L'aire « S » de la surface engendrée par la rotation d'une ligne plane « Γ » autour d'un axe « Δ » situé dans son plan et qui **ne la coupe pas**, est égale au produit de la longueur « L » de la ligne « Γ » par la longueur de la circonférence du cercle engendré par la rotation autour de l'axe « Δ » du centre d'inertie G de la ligne « Γ ».



$$\boxed{S = 2\pi\, X_G\, L}$$

Théorème n°2:

Le volume « V » du solide de révolution engendrée par la rotation d'une surface plane « δ » autour d'un axe « Δ » situé dans son plan et qui **ne la coupe pas**, est égale au produit de l'aire « A » de la surface « δ » par la longueur de la circonférence du cercle engendré par la rotation autour de l'axe « Δ » du centre d'inertie G de la surface « δ ».

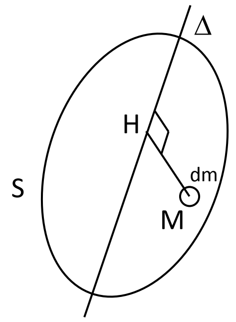


$$\boxed{V = 2\pi\, X_G\, A}$$

5. Opérateur d’inertie

5.1. Moment d’inertie d’un solide par rapport à un axe

5.1.1. Définition



Soit un axe Δ lié à un solide S de masse m. Soit r la distance d’un point M quelconque du solide S à l’axe Δ.

Le **moment d’inertie** du solide S par rapport à l’axe Δ est le scalaire suivant :

$$\boxed{I_\Delta(S) = \int_{P\in S} r^2 dm}$$

Unités : kg.m²

Remarques :

Le moment d’inertie d’un solide par rapport à un axe est un scalaire positif ou nul.

Le moment d’inertie caractérise la répartition de la masse du solide S autour de l’axe Δ. Plus la matière de S est éloignée de Δ, plus le moment d’inertie est grand et plus le solide est résistant aux variations de fréquence de rotation.

5.1.2. Rayon de giration

Le moment d’inertie étant le produit d’une masse par le carré d’une distance, on définit pour le solide S le rayon de giration R par :

$$\boxed{I_\Delta(S) = m\ R^2}$$

L’intérêt du rayon de giration est de donner une indication sur l’éloignement des masses par rapport à l’axe considéré. Tout se passe comme si la masse m du solide S était concentrée en un point situé à une distance R de l’axe Δ.

5.1.3. Moment d’inertie de solides composés

Le moment d’inertie d’un solide composé est égal à la **somme arithmétique des moments d’inertie** de chacun des solides constitutifs par rapport au même axe.

5.1.4. Moment d’inertie dans un repère orthonormé

Le moment d'inertie du solide par rapport à l’axe z est :

$$\boxed{I_z = \int_S r_z^2 dm = \int_S \left(x^2 + y^2\right)\ dm}$$

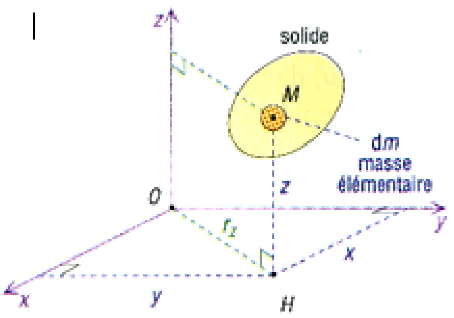
avec r_z distance entre M, de masse élémentaire dm, et l’axe z : $\boxed{r_z^2 = x^2 + y^2}$

Par permutation, on obtient :

$$\boxed{I_y = \int_S r_y^2 dm = \int_S \left(x^2 + z^2\right)\ dm}$$

$$\boxed{I_x = \int_S r_x^2 dm = \int_S \left(y^2 + z^2\right)\ dm}$$

M point du solide S tel que : $\boxed{\overrightarrow{OM} = x\ \vec{x} + y\ \vec{y} + z\ \vec{z}}$



Le moment d'inertie du solide par rapport au point O est :

$$\boxed{I_O = \int_S \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\ dm}$$

5.2. <u>Opérateur d'inertie d'un solide en un point O</u>

L'opérateur d'inertie et la **matrice** qui lui est associée permettent de **définir complètement un solide d'un point de vue inertiel.**

La matrice associée à l'opérateur d'inertie de S au point O exprimée dans la base B s'écrit ainsi :

$$\boxed{\left[I(O,S)\right] = \begin{pmatrix} \int_S \left(y^2 + z^2\right) dm & -\int_S xy\ dm & -\int_S xz\ dm \\ -\int_S xy\ dm & \int_S \left(x^2 + z^2\right) dm & -\int_S yz\ dm \\ -\int_S xz\ dm & -\int_S yz\ dm & \int_S \left(x^2 + y^2\right) dm \end{pmatrix}_B}$$

Cette matrice est appelée **matrice d'inertie**. Par la suite on l'écrira sous la forme :

$$\boxed{\left[I(O,S)\right] = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_B}$$

Cette matrice est symétrique. La **trace de la matrice d'inertie est égale au double du moment d'inertie** du solide S par rapport au point O :

$$\boxed{A + B + C = 2\ I_O}$$

A : moment d'inertie du solide S par rapport à l'axe $\boxed{(O, \vec{x})}$

B : moment d'inertie du solide S par rapport à l'axe $\boxed{(O, \vec{y})}$

C : moment d'inertie du solide S par rapport à l'axe $\boxed{(O, \vec{z})}$

D : produit d'inertie du solide S par rapport au plan $\boxed{(O, \vec{y}, \vec{z})}$

E : produit d'inertie du solide S par rapport au plan $\boxed{(O, \vec{x}, \vec{z})}$

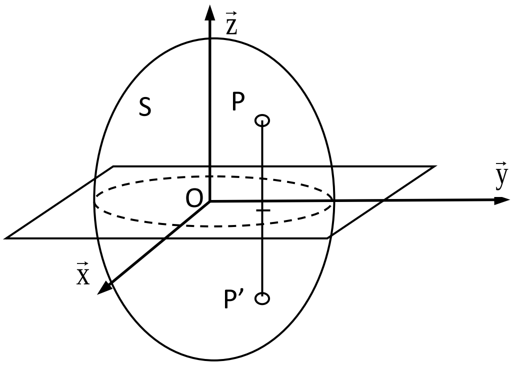
F : produit d'inertie du solide S par rapport au plan $\boxed{(O, \vec{x}, \vec{y})}$

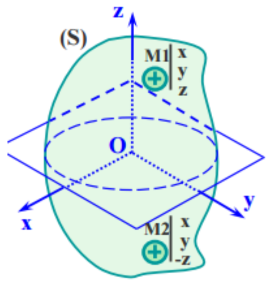
Rq : dans le repère $\boxed{(O,\ \vec{x}', \vec{y}', \vec{z}')}$ *appelé repère principal d'inertie, la matrice associée à I(O,S) est diagonale. Elle est appelée la matrice principale d'inertie.*

5.3. Détermination pratique des matrices d'inertie

5.3.1. Plan de symétrie

Considérons le solide (S) ci-dessous admettant le plan $\boxed{(O,\vec{x},\vec{y})}$ comme plan de symétrie matérielle.





A tout point P(x, y, z) de masse dm, on peut associer le point P'(x, y, -z) également de masse dm.

Les produits d'inertie $\boxed{D=\int_S yz\ dm \text{ et } E=\int_S xz\ dm}$ **sont nuls** car $\boxed{\int_S yz\ dm}$ pour z ≥ 0 est opposé à $\boxed{\int_S yz\ dm}$ pour z ≤ 0. On raisonne de la même façon pour E.

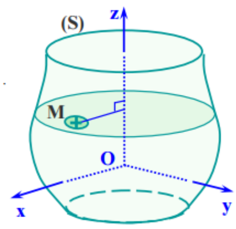
Dans ce cas, l'axe $\boxed{(O,\vec{z})}$ est axe principal d'inertie de S.

$$\overline{\overline{I(O,S)}} = {}_O\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

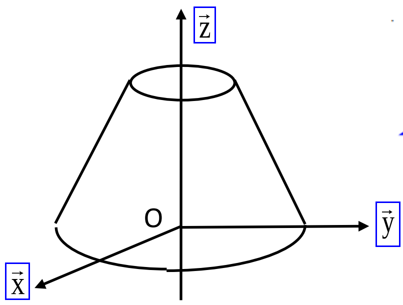
5.3.2. Solide admettant 2 plans orthogonaux de symétrie matérielle

Considérons la matrice d'inertie [I(O,S)] exprimée dans le repère R(O,x,y,z) construit sur ces 2 plans de symétrie. En utilisant le même raisonnement que précédemment on montre que tous les produits d'inertie sont nuls (**D = E = F = 0**) : le repère est repère principal d'inertie.

5.3.3. Solide admettant un axe de symétrie de révolution



Soit (O,z) cet axe de révolution, et soit R(O,x,y,z) un repère orthonormé positif quelconque construit sur (O,z).

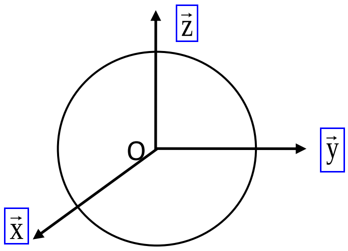


Du fait de la symétrie, on a : $\boxed{\int_S x^2\ dm = \int_S y^2\ dm}$ donc A = B.

$$\boxed{[I(O,S)] = \begin{pmatrix} \int_S (y^2+z^2)dm & 0 & 0 \\ 0 & \int_S (y^2+z^2)dm & 0 \\ 0 & 0 & 2\int_S y^2 dm \end{pmatrix}_{(-,-,\vec{z})} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(-,-,\vec{z})}}$$

$$\boxed{2A = C + 2\int_S z^2\ dm}$$

5.3.4. Solide admettant un centre de symétrie matérielle de révolution



Du fait de la symétrie, on a :

$\boxed{\int_S x^2\ dm = \int_S y^2\ dm = \int_S z^2\ dm}$ donc A = B = C.

$$\boxed{\left[I(O,S)\right] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}_{(-,-,-)}}$$

A = 1/3 I_O

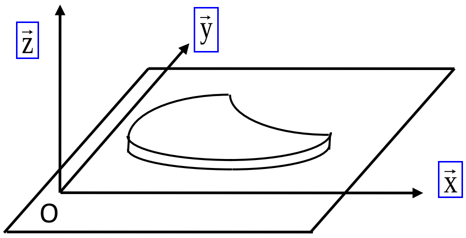
5.3.5. Solide plan ayant une épaisseur négligeable

Epaisseur négligeable suivant l'axe (O,z) donc **z = 0**

Il en résulte :

$$\boxed{A = \int_S y^2\ dm,\ B = \int_S x^2\ dm \text{ et } C = \int_S \left(x^2 + y^2\right)\ dm = A + B}$$

Et D = E = 0.



$$\boxed{\left[I(O,S)\right] = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{pmatrix}_{(x,y,z)}}$$

5.4. Variation de [I(O,S)] avec le point O – Théorèmes de Huyghens

5.4.1. Relation entre les opérateurs d'inertie en O et en G

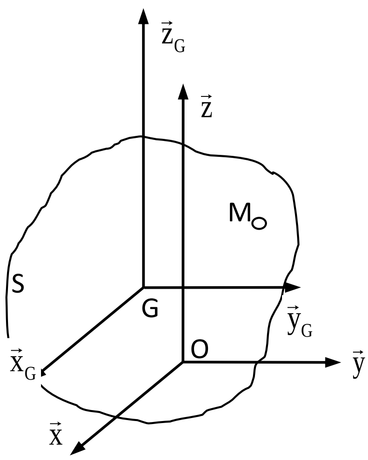
Théorème de **Huyghens généralisé** (écriture matricielle) :

$$\boxed{\left[I(O,S)\right] = \left[I(G,S)\right] + m\begin{pmatrix} \left(y_G^2 + z_G^2\right) & -x_G y_G & -x_G z_G \\ -x_G y_G & \left(x_G^2 + z_G^2\right) & -y_G z_G \\ -x_G z_G & -y_G z_G & \left(x_G^2 + y_G^2\right) \end{pmatrix}_{B(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

Remarques :

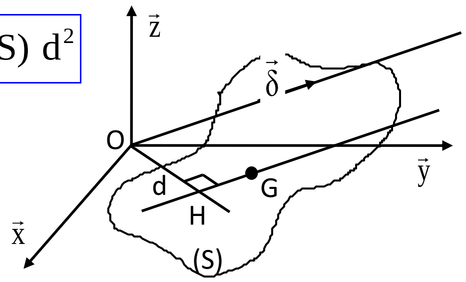
Les moments d'inertie suivant la diagonale sont minimaux au centre d'inertie G

*On ne peut pas exprimer directement une matrice d'inertie en un point B à partir de son expression au point A : il **faut passer par le point G.***

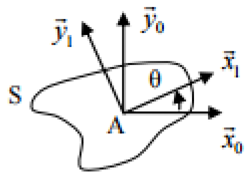


5.4.2. Théorème de HUYGHENS pour les moments d'inertie par rapport à un axe de S

$$\boxed{I_{O\delta} = I_{G\delta} + m(S)\ d^2}$$



5.5. Changement de base



On définit une matrice de passage de la base b vers la base b_1

$$\boxed{[I(O,S)]_{B2} = P^{-1}.[I(O,S)]_B.P}$$

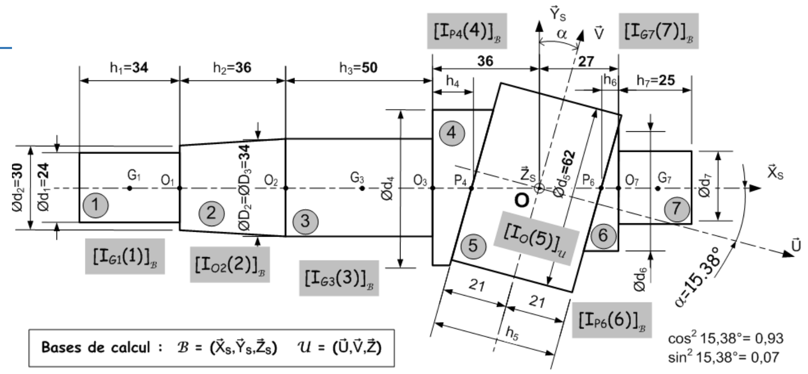
$$\overline{\overline{P_{(b \to b_1)}}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Attention, en général, on veut uniquement le moment d'inertie autour d'un axe Ok (k : vecteur unitaire), donc :

$$\boxed{I(S,O_{\vec{k}}) = \left([I(O,S)].[\vec{k}] \right).\vec{k}}$$

Exemple :

Soit l'arbre suivant :



La matrice d'inertie du cylindre 5 en O est donnée dans sa base u,v :

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix} \text{ avec } A = \frac{Mr^2}{2} \qquad B = C = \frac{Mr^2}{4} + \frac{M\,l^2}{12}$$

La matrice de 5 en O dans la base x_0,y_0 en projection sur l'axe x_0, se calcule ainsi :

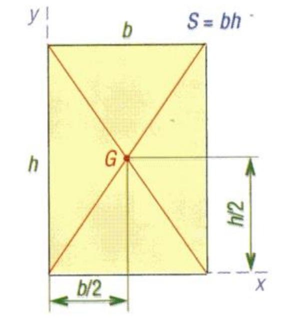
$$\boxed{[I(5/O_{\vec{x}_0})] = \left([I(O,5)].\vec{x}_0 \right).\vec{x}_0} \quad \text{avec } \boxed{\vec{x}_0 = \cos\alpha\vec{u} + \sin\alpha\vec{v}}$$

Soit : $\boxed{[I(O(5)].\vec{x}_0)] =} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}_u . \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}_u = \begin{bmatrix} A\cos\alpha \\ B\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}_u ..$

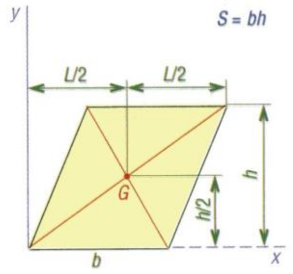
Donc : $\boxed{[I(5/O_{\vec{x}_0})] = A\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha}$

FORMULAIRE : Centre d'inertie

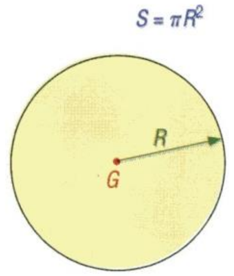
Rectangle



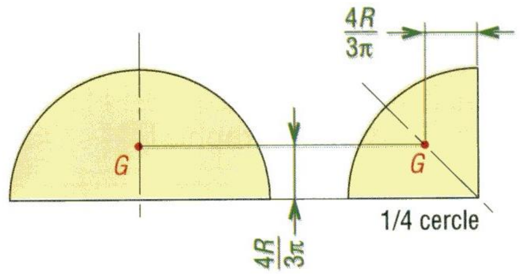
Parallélogramme



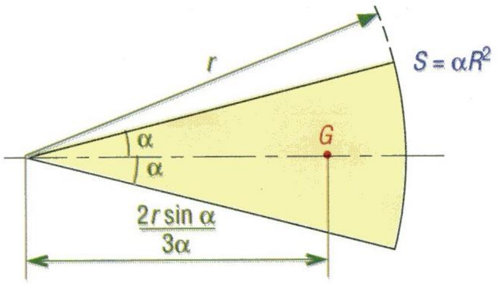
Cercle



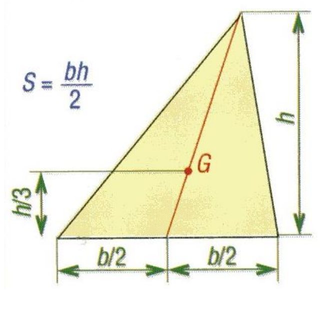
½ cercle



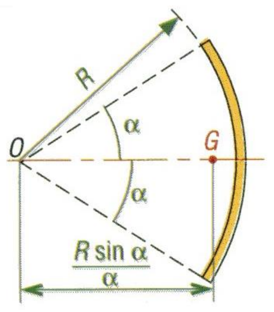
Secteur circulaire



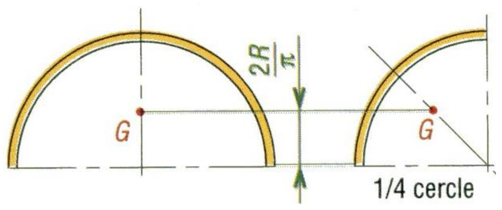
Triangle



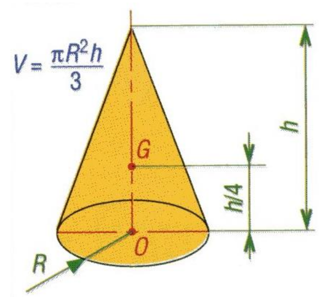
Tige circulaire ou cerceau



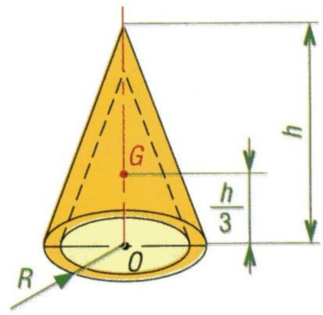
Tige ½ cercle



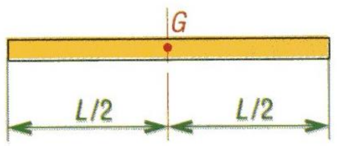
Cône

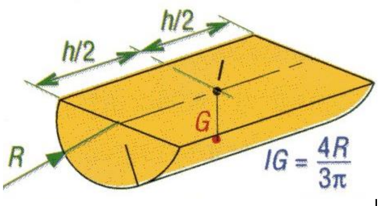
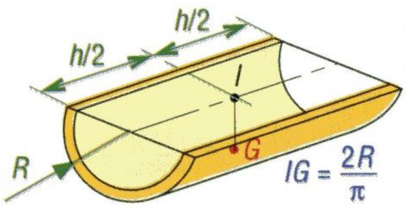
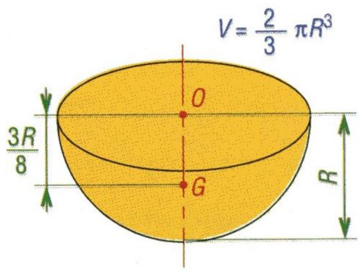


Cône creux

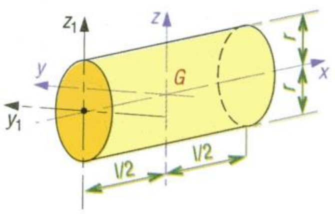
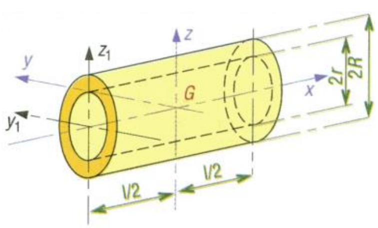
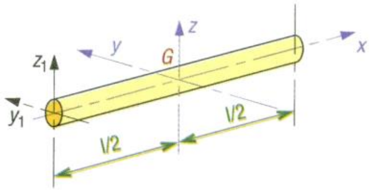


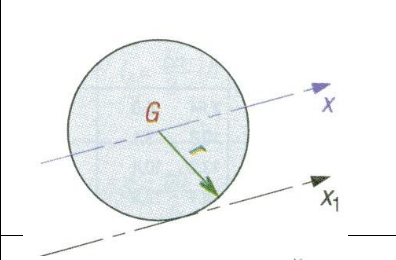
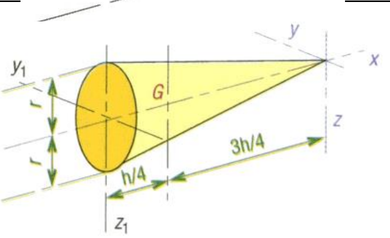
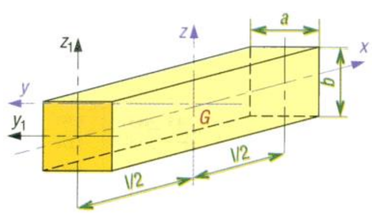
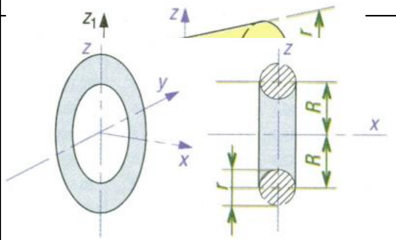
Tige droite



½ cylindre	½ cylindre creux	½ sphère
		

FORMULAIRE : Moments d'inertie, matrice d'inertie

Volume	Paramétrage	Forme de la matrice <u>au point G</u>	Moments d'inertie **avec M masse du volume**
Cylindre plein **V = π.r².l**		$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}$ (x, y, z)	$A = \frac{Mr^2}{2}$ $B = C = \frac{Mr^2}{4} + \frac{M\,l^2}{12}$ $Nota : B_1 = C_1 = \frac{Mr^2}{4} + \frac{M\,l^2}{3}$
Cylindre creux **V = π(R²-r²).l**		$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}$ (x, y, z)	$A = \frac{M(R^2+r^2)}{2} \approx M\,r_m^2 \;(r_m = \frac{R+r}{2})$ $B = C = \frac{M(R^2+r^2)}{4} + \frac{M\,l^2}{12}$ $Nota : B_1 = C_1 = \frac{M(R^2+r^2)}{4} + \frac{M\,l^2}{3}$
Tige pleine		$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}$ (x, y, z)	$A = 0 \; (r \text{ négligeable devant } l)$ $B = C = \frac{M\,l^2}{12}$ $Nota : B_1 = C_1 = \frac{M\,l^2}{3}$

Sphère V = $\frac{4.\pi.r^3}{3}$	 	$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}$ (x, y, z)	$A = B = C = \frac{2}{5}Mr^2$ $Nota : A_1 = \frac{7}{5}Mr^2$
Cône plein V = $\frac{\pi.r^2.h}{3}$	 	$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}$ (x, y, z)	$A = \frac{3Mr^2}{10}$ $B = C = \frac{3Mr^2}{20} + \frac{3M\ h^2}{5}$ $Nota : B_1 = C_1 = \frac{3Mr^2}{20} + \frac{M\ h^2}{10}$ $B_G = C_G = \frac{3M}{80}(4r^2 + h^2)$
Parallélépipède rectangle V = a.b.l	 	$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$ (x, y, z)	$A = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$ $B = \frac{M}{12}(b^2 + l^2)$ $B_1 = \frac{Mb^2}{12} + \frac{Ml^2}{3}$ $C = \frac{M}{12}(a^2 + l^2)$
Tore **V = 2π².R.r²**	 	$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}$ (x, y, z)	$A = \frac{M}{4}(4R^2 + 3r^2)$ $B = C = M(R^2 + \frac{5r^2}{8})$