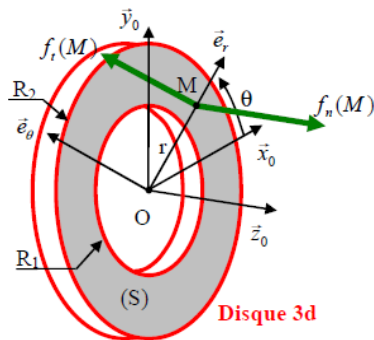


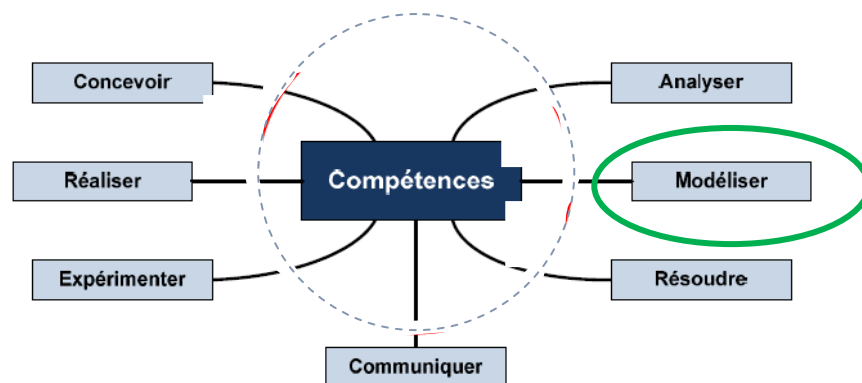
# Cycle 6: Modélisation, prévision et vérification du comportement statique des systèmes mécaniques

## Chapitre 4 : Densité surfacique, linéique et volumique d'efforts



Savoir

- Mod6: Modéliser les efforts issus du modèle local de densité surfacique, linéique ou volumique





### 1. Généralités

Les lois de Coulomb concernant le frottement de glissement ne sont valables que pour un contact ponctuel. Or on constate que très souvent le contact entre deux solides n'est pas ponctuel et s'effectue sur une surface entière. Pour déterminer les actions mécaniques de contact dans ce cas de figure, on considère alors de petites zones « quasi ponctuelles » autour de chaque point de la zone de contact et on écrit les lois de Coulomb sur des densités surfaciques d'effort.

#### Définition du modèle local avec frottement

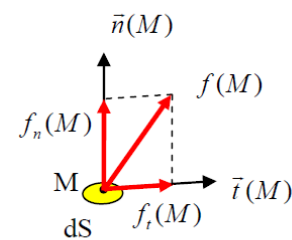
On définit l'action mécanique élémentaire de l'élément de surface  $d\vec{F}_{1\rightarrow 2} = \vec{f}(M).dS$  avec  $\vec{f}(M) = f_n(M).\vec{n}(M) + f_t(M).\vec{t}(M)$  où :

$f_n(M)$  : densité surfacique normale d'effort en M ( $f_n(M) = -p(M)$  dans le cas de pression de contact sur une surface)

$\vec{n}(M)$  : vecteur unitaire normal au plan tangent de la surface

$f_t(M)$  : densité surfacique tangentielle d'effort en M

$\vec{t}(M)$  : vecteur unitaire d'une direction du plan tangent de la surface



On applique ensuite les lois de Coulomb sur l'action mécanique élémentaire et on considère que l'on a une infinité d'actions mécaniques élémentaires sur la surface étudiée. La répartition de ces actions mécaniques élémentaires permet d'obtenir un champ vectoriel qui correspond à la modélisation locale des actions mécaniques.



Les lois de Coulomb pour le modèle local sont les mêmes que celles présentée pour le contact ponctuel mais elles portent cette fois-ci sur les densités d'effort.

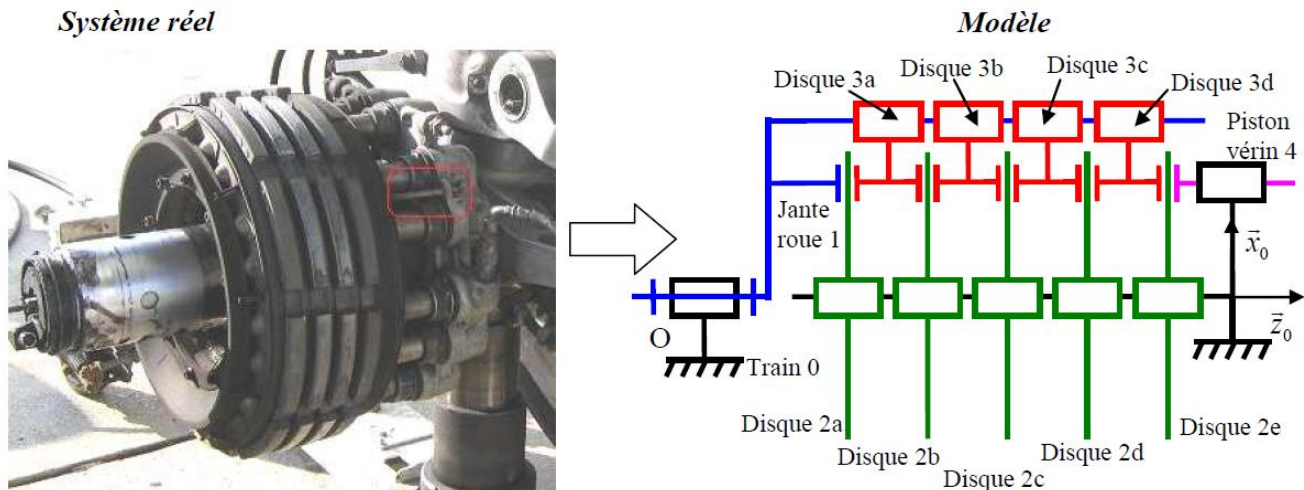
#### Définition du modèle global avec frottement

On note  $\{F_{1\rightarrow 2}\}_A = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{1\rightarrow 2} \\ M_{A(1\rightarrow 2)} \end{matrix} \right\}$  l'action mécanique du solide 1 sur le solide 2 sur une surface S. Le

modèle global est obtenu à partir du modèle local :

$$\{F_{1\rightarrow 2}\}_A = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{1\rightarrow 2} = \int d\vec{F}_{1\rightarrow 2} \\ M_{A(1\rightarrow 2)} = \int_{(S)} \vec{AM} \wedge d\vec{F}_{1\rightarrow 2} \end{matrix} \right\}$$

## 2. Exemple: système de freinage de l'A320



Le Bloc de freinage est doté de 9 disques en carbone, 5 en liaison glissière d'axe  $\bar{z}_0$  par rapport au train repéré 0 (disques 2) et 4 en liaison glissière d'axe  $\bar{z}_0$  par rapport à la jante de la roue repéré 1 (disques 3).

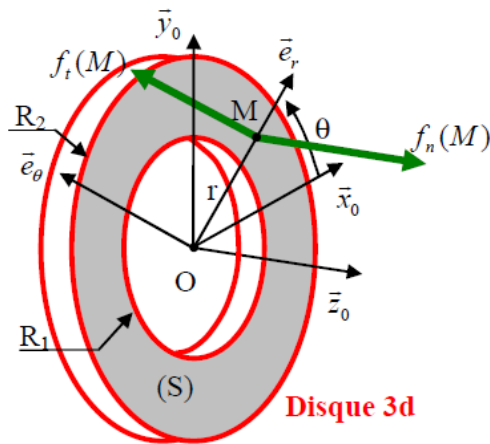
Pour mettre en contact ces disques et par conséquent freiner la jante de la roue 1, un dispositif hydraulique constitué de 14 vérins équi-répartis, dont le vérin 4, permet d'exercer une action mécanique sur le disque 2e définie par le torseur suivant :

$$\{F_{\text{vérins} \rightarrow 2e}\}_o = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{\text{vérins} \rightarrow 2e}} = -F_0 \cdot \bar{z}_0 \\ \bar{0} \end{array} \right\} \text{ où } F_0 = 10^6 \text{ N}$$

Cette action mécanique est intégralement transmise au disque 3d (et de proche en proche à tous les autres disques) et elle génère grâce au frottement un moment permettant d'immobiliser petit à petit le disque 3d par rapport au disque 2e. Par conséquent on a :

$$\{F_{2e \rightarrow 3d}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{2e \rightarrow 3d}} = -F_0 \cdot \bar{z}_0 \\ \overrightarrow{M_{O(2e \rightarrow 3d)}} = M_0 \cdot \bar{z}_0 \end{array} \right\}$$

Objectif d'étude : Déterminer la relation entre l'effort presseur  $F_0$  exercé par le dispositif hydraulique sur le disque 2e et le moment de freinage global  $M_{\text{global}}$  exercé par le bloc de freinage sur la jante de la roue.



Compte tenu de la géométrie de la surface de contact (S) entre 2e et 3d on utilise les coordonnées polaires pour paramétrer cette surface.

Données :

$$R_2 = 300 \text{ mm} ; R_1 = 200 \text{ mm} ; f = 0,5$$

Définition de l'action mécanique élémentaire et du modèle local.

Par définition on a :

$$\{F_{2e \rightarrow 3d}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{2e \rightarrow 3d}} = \int_{(S)} d\overrightarrow{F_{2e \rightarrow 3d}} \\ \overrightarrow{M_{O(2e \rightarrow 3d)}} = \int_{(S)} \overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{F_{2e \rightarrow 3d}} \end{array} \right\} \text{ avec } d\overrightarrow{F_{2e \rightarrow 3d}} = [f_n(M) \cdot \vec{n}(M) + f_t(M) \cdot \vec{t}(M)] dS$$

- On suppose que la pression de contact de 2e sur 3d est uniforme soit  $f_n(M) = -p(M) = -p_0$ .
- Le vecteur normal au plan tangent commun à 2e et 3d sortant de la matière de 3d est  $\vec{z}_0$  soit  $\vec{n}(M) = \vec{z}_0$
- L'existence du glissement induit que  $f_t(M)$  est sur le cône de frottement soit  $f_t(M) = f \cdot f_n(M)$

Au final l'action mécanique élémentaire s'écrit :  $d\overrightarrow{F_{2e \rightarrow 3d}} = (-p_0 \cdot \vec{z}_0 + f \cdot p_0 \cdot \vec{e}_\theta) \cdot dS$

$$\text{Et le modèle local : } \{F_{2e \rightarrow 3d}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{2e \rightarrow 3d}} = \int_{(S)} (-p_0 \cdot \vec{z}_0 + f \cdot p_0 \cdot \vec{e}_\theta) \cdot dS \\ \overrightarrow{M_{O(2e \rightarrow 3d)}} = \int_{(S)} \overrightarrow{OM} \wedge (-p_0 \cdot \vec{z}_0 + f \cdot p_0 \cdot \vec{e}_\theta) \cdot dS \end{array} \right\}$$



Définition du modèle global.

On intègre le modèle local sur la surface (S)

$$\overrightarrow{R_{2e \rightarrow 3d}} = \int_{(S)} (-p_0 \cdot \vec{z}_0 + f \cdot p_0 \cdot \vec{e}_\theta) \cdot dS \text{ avec } dS = r \cdot dr \cdot d\theta \text{ et } \vec{e}_\theta = -\sin \theta \cdot \vec{x}_0 + \cos \theta \cdot \vec{y}_0$$

$$\overrightarrow{R_{2e \rightarrow 3d}} = -p_0 \cdot \int_{(S)} r \cdot dr \cdot d\theta \cdot \vec{z}_0 + p_0 \cdot f \cdot \int_{(S)} r \cdot dr \cdot d\theta \cdot (-\sin \theta \cdot \vec{x}_0 + \cos \theta \cdot \vec{y}_0) = -p_0 \cdot \vec{z}_0 \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_{R_1}^{R_2} r \cdot dr + \vec{0}$$

$$\overrightarrow{R_{2e \rightarrow 3d}} = -p_0 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{R_2^2 - R_1^2}{2} \cdot \vec{z}_0 = -p_0 \cdot \pi \cdot (R_2^2 - R_1^2) \cdot \vec{z}_0$$

Soit :  $\boxed{\overrightarrow{R_{2e \rightarrow 3d}} = -p_0 \cdot \pi \cdot (R_2^2 - R_1^2) \cdot \vec{z}_0}$

$$\overrightarrow{M_{O(2e \rightarrow 3d)}} = \int_{(S)} \overrightarrow{OM} \wedge (-p_0 \cdot \vec{z}_0 + f \cdot p_0 \cdot \vec{e}_\theta) \cdot dS = \int_{(S)} r \cdot \vec{e}_r \wedge (-p_0 \cdot \vec{z}_0 + f \cdot p_0 \cdot \vec{e}_\theta) \cdot dS = \int_{(S)} (r \cdot p_0 \cdot \vec{e}_\theta + f \cdot r \cdot p_0 \cdot \vec{z}_0) \cdot dS$$

$$\overrightarrow{M_{O(2e \rightarrow 3d)}} = p_0 \cdot \int_{(S)} r^2 dr \cdot d\theta \cdot (-\sin \theta \cdot \vec{x}_0 + \cos \theta \cdot \vec{y}_0) + f \cdot p_0 \cdot \vec{z}_0 \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_{R_1}^{R_2} r^2 \cdot dr = \vec{0} + \frac{2}{3} \cdot f \cdot p_0 \cdot \pi \cdot (R_2^3 - R_1^3) \cdot \vec{z}_0$$

Soit :  $\boxed{\overrightarrow{M_{O(2e \rightarrow 3d)}} = \frac{2}{3} \cdot f \cdot p_0 \cdot \pi \cdot (R_2^3 - R_1^3) \cdot \vec{z}_0}$

Sachant que  $\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{2e \rightarrow 3d}} = -F_0 \cdot \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{M_{O(2e \rightarrow 3d)}} = M_0 \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\}$  et  $F_0 = p_0 \cdot \pi \cdot (R_2^2 - R_1^2)$  et  $M_0 = \frac{2}{3} \cdot f \cdot p_0 \cdot \pi \cdot (R_2^3 - R_1^3)$

On a  $p_0 = \frac{F_0}{\pi \cdot (R_2^2 - R_1^2)}$  et on obtient :  $\boxed{M_0 = \frac{2}{3} \cdot f \cdot F_0 \cdot \frac{(R_2^3 - R_1^3)}{(R_2^2 - R_1^2)}}$

Le moment de freinage global  $M_{global}$  exercé par le bloc de freinage sur la jante de la roue correspond au moment  $M_0$  multiplié par le nombre de surfaces en contact entre les disques (9 sur le bloc de l'A320).

$M_{global} = 9 \cdot M_0$  soit :  $\boxed{M_{global} = 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot f \cdot F_0 \cdot \frac{(R_2^3 - R_1^3)}{(R_2^2 - R_1^2)}}$