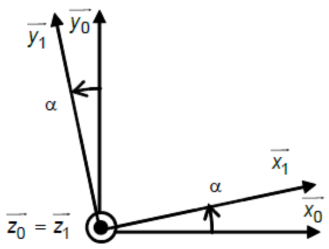
Cycle 5: Modélisation, prévision et vérification du comportement cinématique des systèmes mécaniques

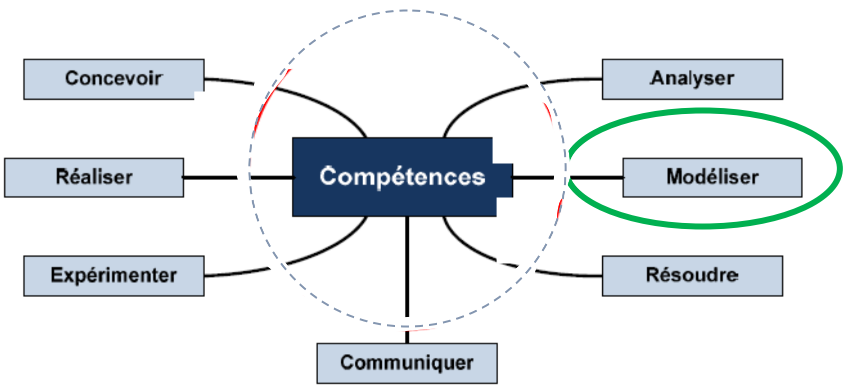
Chapitre 2 – Rappels sur le calcul vectoriel et scalaire



$$\overrightarrow{x_1} = \cos\alpha.\overrightarrow{x_0} + \sin\alpha.\overrightarrow{y_0} \qquad \overrightarrow{x_0} = \cos\alpha.\overrightarrow{x_1} - \sin\alpha.\overrightarrow{y_1}$$
$$\overrightarrow{y_1} = -\sin\alpha.\overrightarrow{x_0} + \cos\alpha.\overrightarrow{y_0} \qquad \overrightarrow{y_0} = \sin\alpha.\overrightarrow{x_1} + \cos\alpha.\overrightarrow{y_1}$$

Savoir

Savoirs :
- Manipuler des vecteurs, les repères et les différents systèmes de coordonnées
- Calculer un produit scalaire
- Calculer un produit vectoriel
- Calculer un produit mixte



Sommaire

1. Notions de scalaires 3
2. Notions de base et repère orthonormé direct 3
3. Notions de vecteurs 3
4. Norme d'un vecteur 4
5. Vecteur unitaire 4
6. Projection d'un vecteur dans le plan 4
7. Opérations sur les vecteurs 5

Rappels sur le calcul vectoriel et scalaire

Objectif :

La notion de vecteur est omniprésente dans le cours de mécanique, pour modéliser par exemple les vitesses en cinématique ou les forces en statique. Aussi est-il nécessaire de faire quelques rappels utiles.

1. Notion de scalaires

Les scalaires sont des nombres positifs, négatifs ou nul, utilisés pour représenter des quantités diverses : *temps, température, masse, énergie,...*
Par exemple : une hauteur de 20 m, un volume de 18 m3, une puissance de 200 MW,...

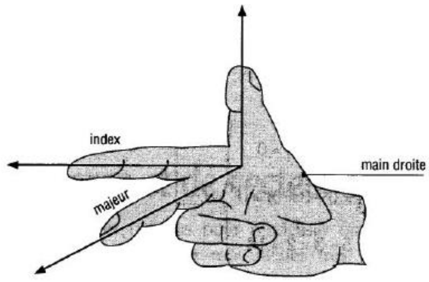
2. Notion de base et repère orthonormés directs

2.1. Base orthonormée directe

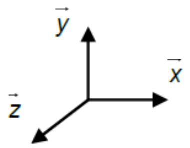
Une base **orthonormée** est constituée de trois vecteurs, perpendiculaires entre eux et de norme (longueur) unitaire tel que $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| = \|\vec{z}\| = 1$.

Pour que cette base soit orthonormée on trace d'abord les deux premiers vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ formant le plan $(\vec{x},\vec{y})$, puis le 3ème vecteur $\vec{z}$ perpendiculairement au plan
et dont le sens est déterminé par la règle :

- des trois doigts de la main droite.



On note la base B $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ et on la représente par :



2.2. Repère orthonormé direct

Un repère est constitué :
- d'une base
- d'un point donné, origine du repère.

Notation : R $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

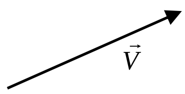
3. Notion de vecteurs

3.1. Vecteur libre

Dans une base B $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ de l'espace vectoriel, il existe 3 réels V_x, V_y et V_z, appelés composantes de $\vec{V}$, tels que l'on puisse écrire de façon unique : $\vec{V} = V_x.\vec{x} + V_y.\vec{y} + V_z.\vec{z} = {}_B\left|\begin{matrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{matrix}\right. = (V_x, V_y, V_z)_B$

NB : il ne faut pas confondre :
- V_x la composante $\vec{V}$ du vecteur suivant la direction $\vec{x}$,
- $\vec{x}$ le vecteur unitaire de la base B suivant la direction $\vec{x}$.

Un vecteur libre est une grandeur définie par :



Une direction	Droite qui porte le vecteur
Un sens	Orientation origine-extrémité du vecteur, symbolisé par une flèche
Une norme (ou intensité, module)	Valeur de la grandeur mesurée par le vecteur, notée $\left\|\overrightarrow{V}\right\|$

3.2. Vecteur bipoint ou « vecteur lié »

Un vecteur bipoint (A, $\vec{V}$) est défini par son origine A et un vecteur libre $\vec{V}$.

Une origine	Point origine du vecteur
Une direction	Droite qui porte le vecteur
Un sens	Orientation origine-extrémité du vecteur, symbolisé par une flèche
Une norme (ou intensité, module)	Valeur de la grandeur mesurée par le vecteur, notée $\left\|\overrightarrow{V}\right\|$

Soient 2 points : A $(x_A, y_A, z_A)_B$ ou A $\left|\begin{array}{l} x_A \\ y_A \\ z_A \end{array}\right._B$ et B $(x_B, y_A, z_A)_B$ ou B $\left|\begin{array}{l} x_B \\ y_B \\ z_B \end{array}\right._B$

On définit : $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A).\vec{x} + (y_B - y_A).\vec{y} + (z_B - z_A).\vec{z} = \left|\begin{array}{l} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{array}\right._B$

<u>Exemple</u> : en cinématique du solide indéformable, le vecteur vitesse en un point A d'un solide S par rapport à un repère R, $\vec{V}_{A\in S/R}$, est un vecteur lié.

3.3. Vecteur glisseur

Un vecteur glisseur est défini par une droite D et un vecteur libre $\vec{V}$.
Deux vecteurs glisseurs sont équivalents s'ils ont même support et même vecteur représentant.

<u>Exemple</u> : en mécanique du solide indéformable, le vecteur force $\vec{F}$ est un vecteur glisseur.

4. Norme d'un vecteur

Dans une base B, la norme (notée $\left\|\overrightarrow{V}\right\|$) d'un vecteur $\vec{V} = \left|\begin{array}{l} V_x \\ V_y \\ V_z \end{array}\right._B$ peut se calculer par : $\left\|\vec{V}\right\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$

5. Vecteur unitaire

On peut aussi définir $\vec{V} = \left\|\vec{V}\right\| . \frac{\vec{V}}{\left\|\vec{V}\right\|} = \left\|\vec{V}\right\| . \vec{u}$ avec $\vec{u} = \frac{\vec{V}}{\left\|\vec{V}\right\|}$ vecteur unitaire directeur de $\vec{V}$ avec $\left\|\vec{u}\right\| = 1$

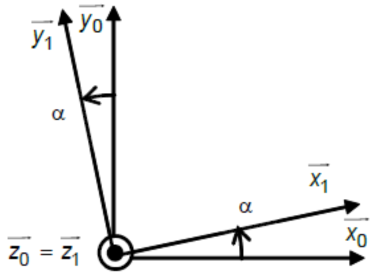
6. Projection d'un vecteur dans le plan

1) Les textes des énoncés nous donnent des informations. Mais nous ne tiendrons JAMAIS COMPTE :
- du schéma réalisé dans une position particulière…
- de la valeur algébrique des angles (120°, -36°, 85°…).

2) Nous **réaliserons des figures planes avec un angle dans le sens trigonométrique autour de** 15°

Pour réaliser ces figures planes, nous commencerons toujours par tracer le vecteur commun aux 2 bases, puis nous placerons les autres vecteurs de façon à obtenir des trièdres directs.

3) Nous nous retrouverons donc avec une figure de ce type où seulement 4 projections sont à connaître :



$$\overrightarrow{x_1} = \cos\alpha.\overrightarrow{x_0} + \sin\alpha.\overrightarrow{y_0} \qquad \overrightarrow{x_0} = \cos\alpha.\overrightarrow{x_1} - \sin\alpha.\overrightarrow{y_1}$$

$$\overrightarrow{y_1} = -\sin\alpha.\overrightarrow{x_0} + \cos\alpha.\overrightarrow{y_0} \qquad \overrightarrow{y_0} = \sin\alpha.\overrightarrow{x_1} + \cos\alpha.\overrightarrow{y_1}$$

Nous pouvons vérifier facilement que nos projections fonctionnent pour toutes les valeurs algébriques de α.
Prenons par exemple les cas particuliers où α = 0°, 90°, 180° et 90°.

7. Opérations sur les vecteurs

Soient deux vecteurs : $\vec{A} = A_x.\vec{x} + A_y.\vec{y} + A_z.\vec{z}$ et $\vec{B} = B_x.\vec{x} + B_y.\vec{y} + B_z.\vec{z}$

7.1. Somme

$$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x).\vec{x} + (A_y + B_y).\vec{y} + (A_z + B_z).\vec{z}$$

Propriétés :

- Commutative : $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$
- Associative : $\vec{S} = \left(\vec{A} + \vec{B}\right) + \vec{C} = \vec{A} + \left(\vec{B} + \vec{C}\right)$

7.2. Soustraction

$$\vec{T} = \vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x).\vec{x} + (A_y - B_y).\vec{y} + (A_z - B_z).\vec{z}$$

7.3. Multiplication par un scalaire

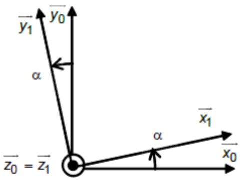
$$\vec{U} = \lambda.\vec{B} = \lambda. \;{}_{B}\left|\begin{matrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{matrix}\right. = {}_{B}\left|\begin{matrix} \lambda.B_x \\ \lambda.B_y \\ \lambda.B_z \end{matrix}\right.$$

Propriétés :

- Distributivité de la somme par rapport à la multiplication par un scalaire : $\vec{S} = \lambda.\left(\vec{A} + \vec{B}\right) = \lambda.\vec{B} + \lambda.\vec{A}$

	Produit scalaire	**Produit vectoriel**
Définition	Le produit scalaire des 2 vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est : **un scalaire**, noté $\vec{A}\,.\,\vec{B}$, tel que : $\vec{A}\,.\,\vec{B} = \lVert\vec{A}\rVert\,.\,\lVert\vec{B}\rVert\,.\cos(\vec{A},\vec{B})$ (Ce nombre peut être positif ou négatif).	Le produit vectoriel des 2 vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est: **un vecteur**, noté $\vec{A} \wedge \vec{B}$: - de direction perpendiculaire au plan $(\vec{A}, \vec{B})$ - de sens tel que le trièdre $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{A} \wedge \vec{B})$ soit direct (règle des 3 doigts de la main droite) - de norme $\lVert\vec{A} \wedge \vec{B}\rVert = \lVert\vec{A}\rVert\,.\,\lVert\vec{B}\rVert\,.\sin(\vec{A},\vec{B})$

Rappels sur le calcul vectoriel et scalaire

Interprétation	Le produit scalaire de 2 vecteurs représente la valeur de la projection orthogonale d'un des vecteurs sur l'autre.	La norme du produit vectoriel est égale à la surface du parallélogramme dont deux côtés issus d'un même sommet sont définis par les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.
Remarque	$\vec{A}.\vec{B}=0 \Rightarrow \begin{cases} soit \quad \vec{A}=\vec{0} \\ soit \quad \vec{B}=\vec{0} \\ soit \quad \cos(\vec{A},\vec{B})=0 \Rightarrow \vec{A}\perp\vec{B} \end{cases}$ $\vec{A}.\vec{A}=\vec{A}^2=\lVert\vec{A}\rVert^2$	$\vec{A}\wedge\vec{B}=\vec{0} \Rightarrow \begin{cases} soit \quad \vec{A}=\vec{0} \\ soit \quad \vec{B}=\vec{0} \\ soit \quad \sin(\vec{A},\vec{B})=0 \Rightarrow \vec{A}//\vec{B} \end{cases}$ $\vec{A}\wedge\vec{A}=\vec{0}$
Propriétés	$\vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}$ $\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{C}$	$\vec{A}\wedge\vec{B}=-\vec{B}\wedge\vec{A}$ $\vec{A}\wedge(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\wedge\vec{B}+\vec{A}\wedge\vec{C}$
Autre	Si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont écrits dans la même base, Alors $\vec{A}\,.\,\vec{B}=(A_x.B_x)+(A_y.B_y)+(A_z.B_z)$	Double produit vectoriel (formule de Gibbs) : $\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})=\vec{B}\times(\vec{A}.\vec{C})-\vec{C}\times(\vec{A}.\vec{B})$
Pour déterminer un produit scalaire ou un produit vectoriel, 3 cas sont envisageables : **1er cas : si les 2 vecteurs sont dans la même base.** **Exemple :** $\vec{x}_2$ **et** $\vec{y}_2$	Exemples pour le produit scalaire $\vec{x}.\vec{y}=0$ $\vec{y}.\vec{z}=0$ $\vec{z}.\vec{x}=0$ $\vec{x}.\vec{x}=\vec{y}.\vec{y}=\vec{z}.\vec{z}=1$	Exemples pour le produit vectoriel L'ordre des vecteurs dans une base directe est x, y, z, x, y, z… Ainsi dans le sens direct, on a : $\vec{x}\wedge\vec{y}=\vec{z}$ $\vec{y}\wedge\vec{z}=\vec{x}$ $\vec{z}\wedge\vec{x}=\vec{y}$ et dans le sens indirect (horaire) : $\vec{z}\wedge\vec{y}=-\vec{x}$ $\vec{x}\wedge\vec{z}=-\vec{y}$ $\vec{y}\wedge\vec{x}=-\vec{z}$ $\vec{x}\wedge\vec{x}=\vec{y}\wedge\vec{y}=\vec{z}\wedge\vec{z}=\vec{0}$
2ème cas : si les 2 vecteurs sont définis dans la même figure plane. **Ex :** 	$\vec{x}_0.\vec{y}_1=1.1.\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$ $\vec{y}_1.\vec{z}_0=0$ $\vec{z}_1.\vec{x}_0=0$ $\vec{x}_1.\vec{x}_0=1.1.\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ $\vec{x}_0.\vec{x}_1=\cos\alpha$ $\vec{y}_0.\vec{x}_1=1\cos(-\frac{\pi}{2}+\alpha)=\sin\alpha$ $\vec{y}_0.\vec{y}_1=\cos\alpha$	$\vec{x}_0\wedge\vec{y}_1=1.1.\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha).\vec{z}_{0,1}=\cos\alpha.\vec{z}_{0,1}$ $\vec{y}_1\wedge\vec{z}_0=\vec{x}_1$; $\vec{y}_0\wedge\vec{z}_0=\vec{x}_0$ $\vec{z}_1\wedge\vec{x}_0=\vec{y}_0$; $\vec{x}_1\wedge\vec{z}_0=-\vec{y}_0$ $\vec{x}_1\wedge\vec{x}_0=1.1.\sin(-\alpha).\vec{z}_{0,1}=-\sin\alpha.\vec{z}_{0,1}$ $\vec{x}_0\wedge\vec{x}_1=\sin\alpha.\vec{z}_{0,}1$ $\vec{y}_0\wedge\vec{x}_1=\sin(-\frac{\pi}{2}+\alpha).\vec{z}_{0,1}=-\cos\alpha.\vec{z}_{0,1}$ $\vec{y}_0\wedge\vec{y}_1=\sin\alpha.\vec{z}_{0,1}$
3ème **cas : si les 2 vecteurs sont :** **- ni de la même base ;** **- et ni définis dans la même figure plane.** **Ex :** $\vec{x}_2$ et $\vec{y}_3$	Il faut projeter un des 2 vecteurs pour retomber dans l'un des 2 cas précédents. **NB : C'est la SEULE et UNIQUE fois que l'on projette en Mécanique…**	