

Cycle 5: Modélisation, prévision et vérification du comportement cinématique des systèmes mécaniques

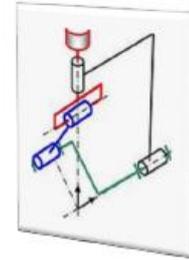
Chapitre 1 : Modélisation des systèmes mécaniques



Effeillage d'un Renault Clio [1]



Moteur 1.5 dCi K9K 105 ch [1]



Modélisation par schéma cinématique[2]

Les systèmes peuvent être constitués de 1 à plusieurs milliers de pièces, appelés encore solides. Ces solides sont liés les uns aux autres pour transmettre des efforts ou des mouvements. La cinématique permet d'étudier les mouvements relatifs entre les solides.

Nous nous intéresserons principalement à des systèmes existants. La géométrie des solides ne permettant pas toujours une étude aisée, nous commencerons par introduire des outils permettant de modéliser ces systèmes.

Problématique

PROBLÉMATIQUE :

- Quels sont les mouvements relatifs existants entre les solides qui constituent un mécanisme ?
- Quels sont les outils graphiques pour modéliser ces mécanismes ?

Savoir

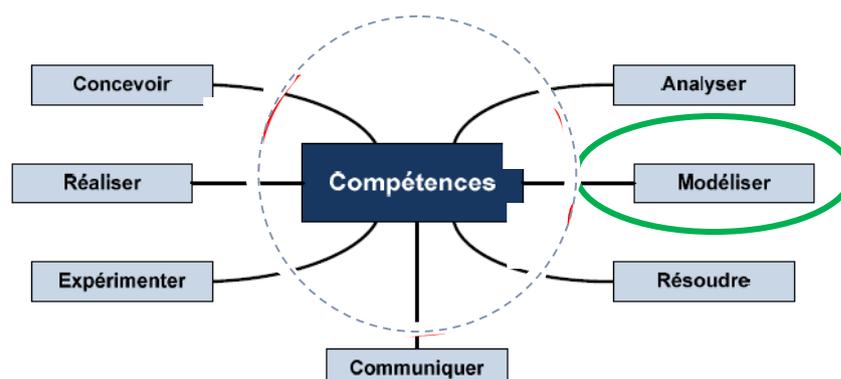
SAVOIRS :

- Identifier la nature des contacts entre les solides.
- Proposer une liaison cinématique associée au contact entre solides.
- Réaliser un graphe de structure.
- Réaliser un schéma cinématique (schéma cinématique minimal et schéma d'architecture).

Remarque

Le but de ce cours est de présenter des méthodes pour modéliser un système mécanique par un schéma cinématique. Suivant les points de vues, d'autres méthodes peuvent être envisagées.

La complexité des contacts entre les solides est telle que les modèles choisis pour modéliser les liaisons peuvent faire l'objet de discussion. J'insiste donc sur le fait que les outils proposés ne sont que des modèles associés à des objets réels.



Sommaire

1. <u>Modèle de comportement cinématique</u>	3
1.1. Schéma cinématique d'un mécanisme	4
1.2. Graphe des liaisons	4
2. <u>Caractérisé les liaisons</u>	5
2.1. Degrés de liberté	5
2.2. Torseurs cinématiques	5
2.3. Liaisons usuelles	5
2.4. Hypothèse de liaison cinématiquement parfaite	9
3. <u>Modéliser les réalisations</u>	9
3.1. Différentes technologies des guidages	9
3.2. Modélisation par contacts directs ou éléments glissants	9
3.3. Modélisation par interposition d'éléments roulants	10
3.4. Nécessité de combinaison des liaisons	13
4. <u>Construire un schéma cinématique</u>	14

I Modèle de comportement cinématique

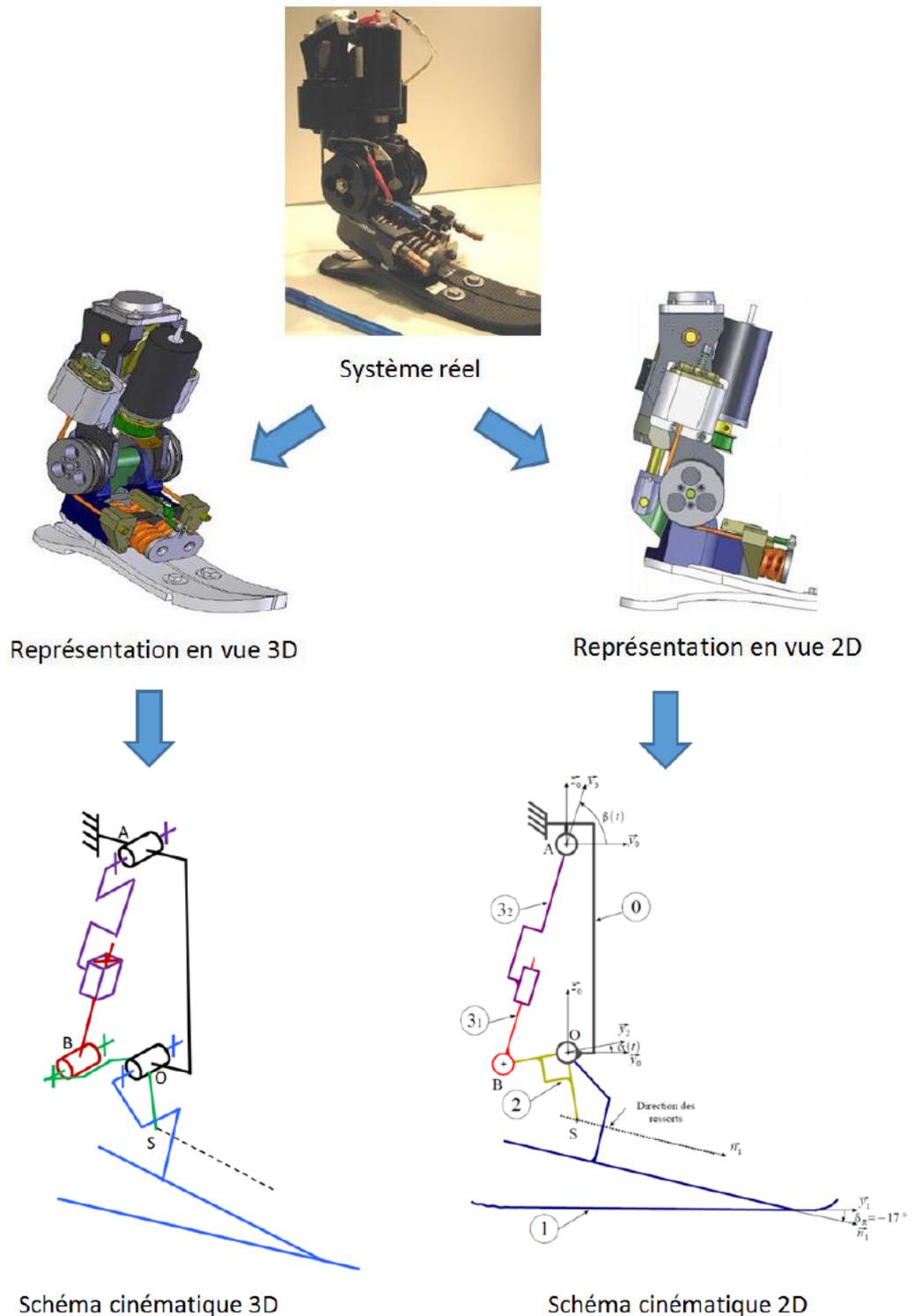
(1) Ils sont aussi à la base des modèles utilisés pour caractériser le comportement statique ou dynamique d'un composant en utilisant les lois de Newton.

Un **modèle de comportement cinématique**, dit **modèle cinématique**, est utilisé pour :

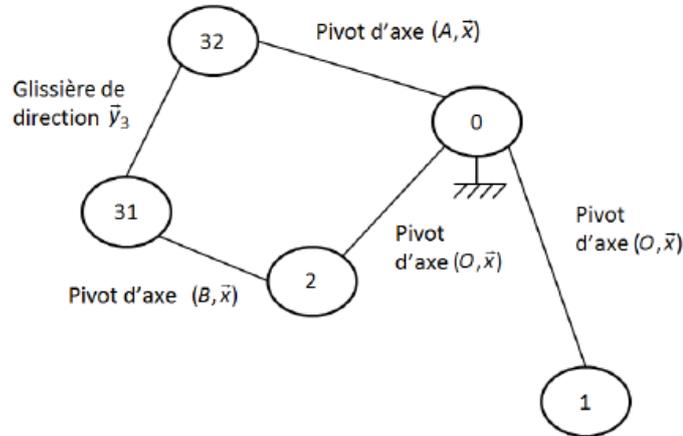
- déterminer des **lois de mouvement** et d'accélération ;
- déterminer les **lois de commande** d'actionneurs ;
- caractériser le **comportement cinématique** d'un composant de la **chaîne d'énergie** ⁽¹⁾.

Ce modèle est représenté par un **schéma cinématique** ou un **graphe des liaisons**.

Exemple pour une prothèse transtibiale :



Modélisation des systèmes mécaniques



Graphe de liaisons

Un modèle cinématique est constitué :

- d'ensembles **indéformables** (une pièce ou un ensemble de pièces solidaires) nommés **Classe d'Équivalence Cinématique (CEC)** ;
- de **liaisons** qui spécifient les **mouvements possibles** et les **mouvements bloqués**, d'un ensemble par rapport à un autre.

Une liaison est un modèle **indépendant** de toute réalisation matérielle.

Ces modèles sont utilisés en phase d'**analyse** de la **chaîne d'énergie d'un système**.

Ils sont aussi utilisés en phase de **conception** car ils ne nécessitent pas de connaître la géométrie des pièces. Seules les positions relatives des liaisons et seuls les mouvements possibles sont pris en compte.

Les deux représentations, **schéma cinématique** et **graphe des liaisons**, sont aussi des outils de **communication scientifique** efficaces.

I.1 Schéma cinématique d'un mécanisme

Dans un **schéma cinématique** :

- les **liaisons** sont représentées par des **symboles normalisés** ;
- les **CEC** sont représentées par des **traits** reliant ces symboles.

Le schéma est dessiné en deux ou trois dimensions. En plus des symboles et traits de définition des CEC, on y trouve des points, des vecteurs et des droites.

I.2 Graphe des liaisons d'un mécanisme

Un **graphe des liaisons** est une représentation en **graphe** d'un modèle cinématique :

- les **nœuds** correspondent aux CEC ;
- les **arrêtes** représentent les liaisons. Le nom et les caractéristiques géométriques des liaisons sont précisées sur chaque arrête ainsi que les paramètres de position.

Le graphe des liaisons est graphiquement plus simple à réaliser qu'un schéma cinématique car la géométrie n'est pas représentée.

Mais il n'y a pas plus d'informations dans un schéma cinématique que dans le graphe qui lui est associé. Il s'agit de **deux représentations d'un même modèle de comportement cinématique**, mais qui mettent en avant des informations différentes.



Modélisation des systèmes mécaniques

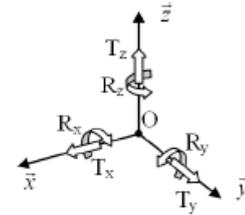
II Caractériser les liaisons

II.1 Degrés de liberté

Les **degrés de liberté** d'une liaison sont les **mouvements élémentaires indépendants** autorisés par la liaison.
 Les autres mouvements élémentaires sont supposés **bloqués**.

Dans un **repère local associé à la liaison**, $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, les degrés de liberté correspondent généralement à :

- des **rotations**, notées R_{Ox} , R_{Oy} et R_{Oz} ;
- des **translations**, notées T_x , T_y et T_z .



Un DDL peut aussi combiner rotation et translation.

II.2 Torseur cinématique d'une liaison

(1) Aussi appelé : torseur des mouvements cinématiquement admissibles. C'est plus précis, mais c'est plus long !

Le **torseur cinématique d'une liaison** $\{V_{2/1}\}_O = \begin{cases} \omega_{x21} \vec{x} + \omega_{y21} \vec{y} + \omega_{z21} \vec{z} \\ v_{xO21} \vec{x} + v_{yO21} \vec{y} + v_{zO21} \vec{z} \end{cases}$ permet de caractériser une liaison en définissant :

- les **DDL** de la liaison ;
- les **paramètres cinématiques** associés à chaque DDL.

Chaque paramètre cinématique non nul correspond à un DDL.

Chaque paramètre cinématique nul correspond à un blocage.

Pour une liaison : **Nombre DDL + Nombre blocages = 6.**

II.3 Liaisons usuelles

Les **liaisons usuelles** correspondent à des modèles souvent utilisés car associés à des réalisations matérielles courantes. Elles font l'objet d'une **norme** qui définit la combinaison de DDL et blocages de ces liaisons.

Informations définies sur les schémas et graphes

Informations définissant la liaison et définies sur les schémas cinématique et graphe des liaisons. Exemple pour une liaison pivot :

Nom	
Liaison pivot	Intitulé normalisé
Caractéristique(s) géométrique(s)	Indication indispensable.
Liaison pivot d'axe (A, \vec{x})	Les caractéristiques géométriques complètent la définition de la liaison. Un axe est une droite.
Symboles de représentation 2D et 3D	
<p style="text-align: center;">Symbole 3D Symbole 2D</p>	Symboles (presque) normalisés ⁽²⁾ permettant d'identifier le nom et les caractéristiques géométriques. Les CEC en liaison sont indifféremment associées à l'une ou l'autre partie du symbole.

(2) Pour une meilleure mémorisation, ils rappellent des réalisations matérielles par contact direct (ici, un axe dans un cylindre avec deux blocages axiaux). C'est un moyen mnémotechnique !



Modélisation des systèmes mécaniques

Informations associées

Exemple d'informations associées à une liaison pivot d'axe (A, \vec{x}) :

Degrés de liberté	
1 degré de liberté : R_{Ax}	Les DDL s'appuie sur un repère de liaison défini à partir des caractéristiques géométriques.
Torseur cinématique	
$\{V_{2/1}\} = \begin{cases} \omega_{x21} \vec{x} \\ \vec{0} \end{cases}$ Paramètre cinématique : ω_{x21}	Exprimé en un point du domaine de validité . Il y a autant de paramètres cinématiques que de DDL.
Domaine de validité⁽¹⁾	
droite (A, \vec{x})	Lieu des points pour lesquels la forme du torseur est conservée .
Relations de blocage	
$\vec{\Omega}_{2/1} \cdot \vec{y} = \vec{\Omega}_{2/1} \cdot \vec{z} = 0$ $\vec{V}_{P \in 2/1} = \vec{0}$	Relations vectorielles associées aux blocages (aux « zéros » du torseur cinématique).
Paramétrage géométrique des degrés de liberté	
	Ce paramétrage géométrique des DDL n'est pas toujours indispensable. Les DDL de rotation sont associés à des angles. Les DDL de translation sont associés à des distances.

(1) Le domaine de validité se déduit des caractéristiques géométriques de la liaison.

Vocabulaire des caractéristiques géométriques

Le tableau ci-dessous liste les différents types d'éléments géométriques utilisés pour caractériser les liaisons, le vocabulaire utilisé et des exemples de définition :

Point	Droite	Plan	Vecteur
centre	axe, droite normale	plan normal	direction, normale
A	(A, \vec{x}) ou (AB)	(A, \vec{x}, \vec{y})	\vec{x} ou \vec{AB}

Notation liés au torseur cinématique

Dans le cas général et lorsque le paramétrage de la liaison n'est pas imposé, on utilisera la notation ci-contre,

$$\{V_{2/1}\} = \begin{cases} \omega_{x,2/1} \vec{x} + \omega_{y,2/1} \vec{y} + \omega_{z,2/1} \vec{z} \\ V_{x,A \in 2/1} \vec{x} + V_{y,A \in 2/1} \vec{y} + V_{z,A \in 2/1} \vec{z} \end{cases}$$

ou une variante allégée, s'il n'y a pas d'ambiguïté (numéro CEC <10...):

$$\{V_{2/1}\} = \begin{cases} \omega_{x21} \vec{x} + \omega_{y21} \vec{y} + \omega_{z21} \vec{z} \\ V_{xA21} \vec{x} + V_{yA21} \vec{y} + V_{zA21} \vec{z} \end{cases}$$

Tableau des liaisons usuelles

Le tableau page suivante recense les liaisons usuelles.

Nom, caractéristiques géométriques et symbolisation sont à connaître par cœur.

DDL associés, domaine de validité et torseur cinématique sont à retrouver sans erreur.

	Géométrie du contact	Forme générale du Torseur cinématique	Validité de la forme générale du Torseur	Degrés de liberté	Nom	Représentation 3D	Représentation 2D
	Surfacique cylindrique	$\begin{Bmatrix} \omega_{x,2/1} & v_{x,A \in 2/1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	Tout point A de l'axe (O, \vec{x})	2	Pivot glissant d'axe (O, \vec{x})		
	Surfacique cylindrique + Surfacique plan	$\begin{Bmatrix} \omega_{x,2/1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	Tout point A de l'axe (O, \vec{x})	1	Pivot d'axe (O, \vec{x})		
		$\begin{Bmatrix} \omega_{x,2/1} & \pm \omega_{x,2/1} \cdot \frac{p}{2\pi} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$ $2\pi \rightarrow \pm p \Rightarrow x = \pm \theta \cdot \frac{p}{2\pi} \Rightarrow v_x = \pm \omega_x \cdot \frac{p}{2\pi}$ Pas à droite + et pas à gauche -	Tout point A de l'axe (O, \vec{x})	1	Hélicoïdale d'axe (O, \vec{x}) et de pas p		
	Surfacique sphérique	$\begin{Bmatrix} \omega_{x,2/1} & 0 \\ \omega_{y,2/1} & 0 \\ \omega_{z,2/1} & 0 \end{Bmatrix}$	Seulement en O	3	Rotule de centre O		
	Surfacique sphérique + linéique rectiligne	$\begin{Bmatrix} \omega_{x,2/1} & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{z,2/1} & 0 \end{Bmatrix}$	Seulement en O	2	Rotule à doigt de centre O et de rotation interdite (O, \vec{y})		
	Linéique annulaire	$\begin{Bmatrix} \omega_{x,2/1} & v_{x,O \in 2/1} \\ \omega_{y,2/1} & 0 \\ \omega_{z,2/1} & 0 \end{Bmatrix}$	Seulement en O	4	Linéaire annulaire de centre O et de direction \vec{x}		

	Plusieurs surfaciques plans	$\begin{Bmatrix} 0 & v_{x,A \in 2/1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	Tout point A de l'espace	1	Glissière de direction \vec{x}		
	Surfacique plan	$\begin{Bmatrix} 0 & v_{x,A \in 2/1} \\ 0 & v_{y,A \in 2/1} \\ \omega_{z,2/1} & 0 \end{Bmatrix}$	Tout point A de l'espace	3	Appui plan de normale \vec{z}		
	Linéique rectiligne	$\begin{Bmatrix} \omega_{x,2/1} & v_{x,A \in 2/1} \\ 0 & v_{y,A \in 2/1} \\ \omega_{z,2/1} & 0 \end{Bmatrix}$	Tout point A du plan (O, \vec{x}, \vec{z})	4	Linéaire rectiligne de ligne de contact (O, \vec{x}) et de normale \vec{z}		
	Ponctuel	$\begin{Bmatrix} \omega_{x,2/1} & v_{x,A \in 2/1} \\ \omega_{y,2/1} & v_{y,A \in 2/1} \\ \omega_{z,2/1} & 0 \end{Bmatrix}$	Tout point A de la normale (O, \vec{z})	5	Ponctuelle de point de contact O et de normale \vec{z}		



Modélisation des systèmes mécaniques

II.4 Hypothèse de liaison cinématiquement parfaite



Les liaisons sont supposées **cinématiquement parfaites** :

- sans jeux (jeux = espace entre deux surfaces permettant des mouvements de petite amplitude),
- de rigidité infinie,
- de géométrie des surfaces en contact supposée parfaite,
- sans limite d'amplitude des mouvements,
- sans limite de vitesse des mouvements,
- bilatérale (mouvements bloqués ou autorisés dans les deux sens de translation ou de rotation).

Les caractéristiques géométriques de la liaison sont donc supposées **indépendantes** des mouvements et des efforts transmis.

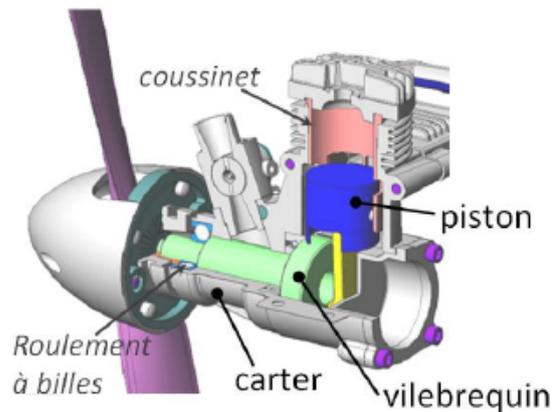
III Modéliser les réalisations

III.1 Différentes technologies des guidages

Les guidages sont les réalisations concrètes des liaisons.

(1) technologie permettant de diminuer les pertes énergétiques par rapport aux réalisations par contact direct. Cela se traduit par des pertes d'énergie par frottement plus faibles et donc un meilleur rendement.

- Ils utilisent différentes technologies :
- réalisation par contact direct,
 - interposition d'éléments glissants⁽¹⁾ (coussinet, cf. piston / carter),
 - interposition d'éléments roulants⁽¹⁾ (roulements à billes, cf. vilebrequin / carter),
 - interposition de fluide (paliers hydrauliques),
 - sans contact (paliers magnétiques).



Micro-moteur thermique d'aéromodélisme

En fonction de l'objectif de l'étude, un même guidage peut être modélisé différemment afin de mettre en évidence telle ou telle propriété.

La démarche utilisée pour modéliser un guidage dépend de sa technologie :

- contact direct ou interposition d'éléments glissants → analyse des contacts ;
- interposition d'éléments roulants → modèle fonctionnel.

III.2 Modélisation des guidages par contact direct ou par interposition d'éléments glissants

Dans les guidages réalisés par contact direct ou par interposition d'éléments glissants, c'est le contact entre une surface d'un composant et une surface d'un autre composant qui réalise les blocages.

Le contact est observé à chaque instant. Des contacts temporaires tels que des butées de fin de course, limitent l'amplitude du mouvement sans modifier leur nature.

La démarche d'analyse est la suivante :

- identifier la géométrie (supposée parfaite) des surfaces en contact : plan, cylindre, sphère...
- en déduire la géométrie de la zone de contact et ses dimensions : segment de droite, segment de cercle, plan, point...
- choisir, à partir de la géométrie de la zone de contact et de ses dimensions, une liaison usuelle.



Modélisation des systèmes mécaniques

Exemple : liaison entre le piston et le carter du micro-moteur

Les deux surfaces en contact sont des portions de cylindre que l'on suppose de même diamètre.

La zone de contact est aussi une portion de cylindre.

La liaison associée est une liaison pivot glissant d'axe identique à celui du cylindre de contact.

Si la longueur L du cylindre de contact était faible par rapport à son diamètre d , $L < 0,25 d$, le guidage aurait pu être modélisé par une liaison sphère / cylindre.

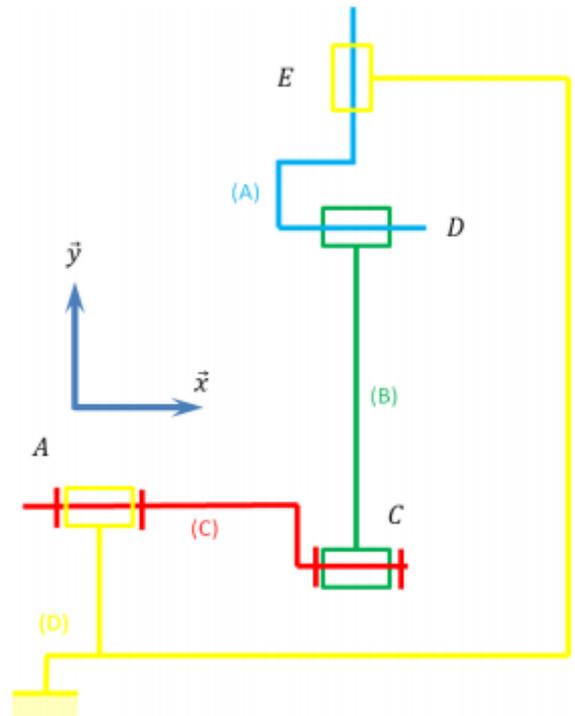
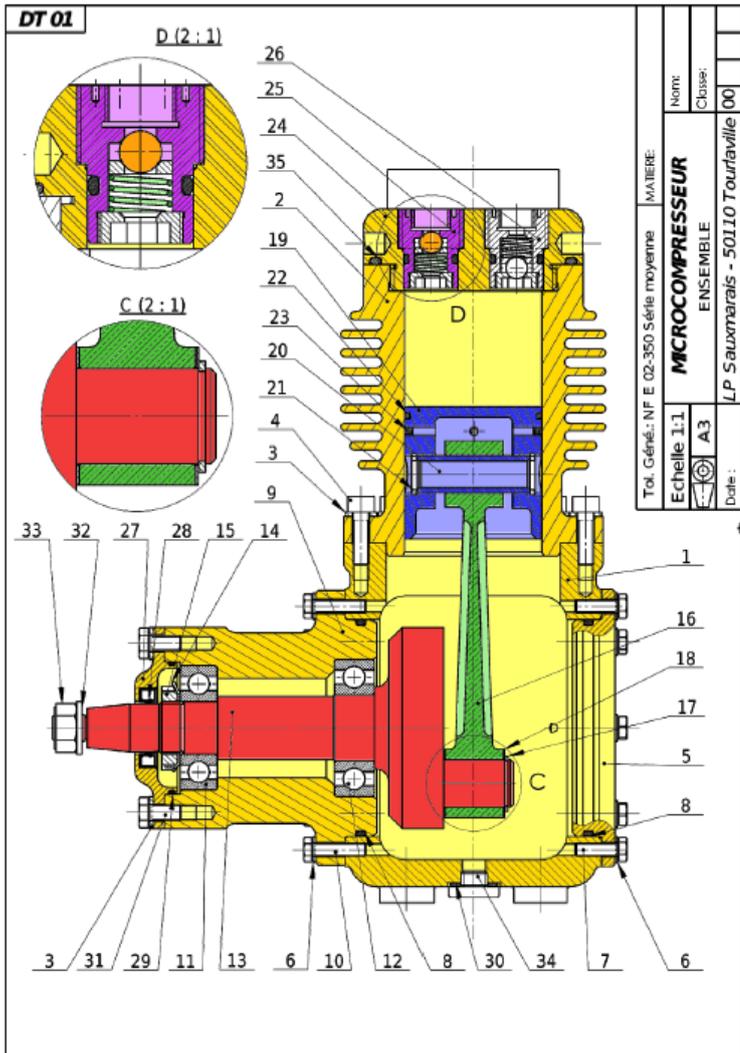


Schéma cinématique minimal

Modélisation des systèmes mécaniques

III.3 Modélisation des guidages par interposition d'éléments roulants

Dans les guidages réalisés par interposition d'éléments roulants, c'est la fonction cinématique du composant qui donne un modèle fonctionnel.

Ce modèle a généralement moins de blocages qu'un modèle obtenu par l'analyse des contacts.

Douilles à billes



Utilisées par trois ou quatre (sur deux colonnes différentes) pour réaliser un guidage en translation.
Modèle fonctionnel d'une douille : pivot glissant

Glissières à billes



Permet de réaliser un guidage en translation.
Modèle fonctionnel : glissière

Roulements à une rangée

Roulements à billes



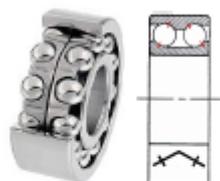
Roulement à rouleaux ou à aiguilles



Utilisés par deux pour réaliser un guidage en rotation.

Modèle fonctionnel d'un roulement : sphérique ou sphère/cylindre. Le centre est celui du roulement.

Roulements à deux rangées de billes



Peut être utilisé seul pour réaliser un guidage en rotation, cf. guidage des roues de voiture.
Modèle fonctionnel : pivot

Rotule lisse



Elles permettent des mouvements de rotations selon 3 axes, dont 2 de faible amplitude.
La zone de contact est une portion de sphère.
Modèle fonctionnel : sphérique

Vis à billes



Souvent utilisée pour commander un axe linéaire à partir d'une rotation (cf. machines d'usinage).
Le modèle fonctionnel : hélicoïdale

Le choix et la façon d'utiliser les roulements sont très complexes, des ouvrages entiers y sont consacrés.

Il ne s'agit pas ici de résumer en quelques lignes les différents cas possibles mais juste de souligner que le modèle (donc la liaison) choisi dépend du type de roulement, de la façon dont il a été installé sur le système et de ce que l'on veut faire du modèle.

Ci-après, les représentations cinématiques des composants particuliers (engrenages, poulies, chaînes)

Modélisation des systèmes mécaniques

TRANSMISSIONS PAR POULIES ET COURROIES							
Transmission par courroie (symbole général)		Type de courroie					
		Plate	<table border="1"> <tr> <td>—</td> <td>Trapézoïdale</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>Crantée</td> <td></td> </tr> </table>	—	Trapézoïdale		
—	Trapézoïdale						
	Crantée						
Poulies étagées		Liaison avec l'arbre					
* Indication éventuelle du type de courroie.		* S'il n'y a pas d'ambiguïté, la croix peut être omise.					
TRANSMISSIONS PAR ROUES DENTÉES ET CHÂÎNES							
Transmission par chaîne (symbole général)		Type de chaîne					
		Maillons					
		Rouleaux					
		Dents					
* Indication éventuelle du type de chaîne.							

ENGRENAGES				
Roue à denture extérieure		Types de dentures*		
		Droite	Hélicoïdale	Chevron
Roue à denture intérieure				
* Indication facultative.				
Roue cônica		Exemples d'applications		
Secteur denté				
Vis sans fin				
Crémaillère				

Modélisation des systèmes mécaniques

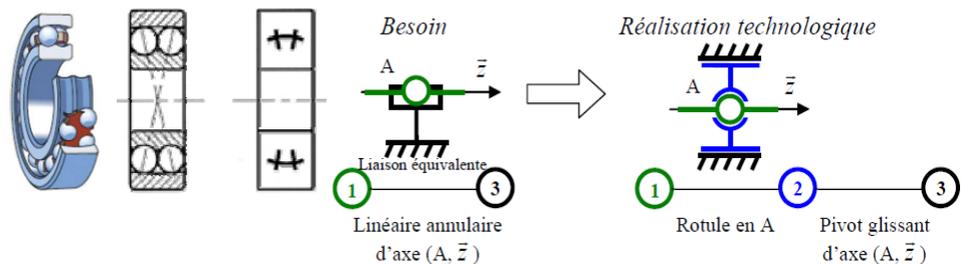
III.3

Nécessité de combinaison des liaisons

Les liaisons simples ne permettent pas toujours à l'ingénieur de traduire un besoin cinématique car deux problèmes apparaissent rapidement lorsque l'on se limite à l'utilisation des liaisons simples définies précédemment :

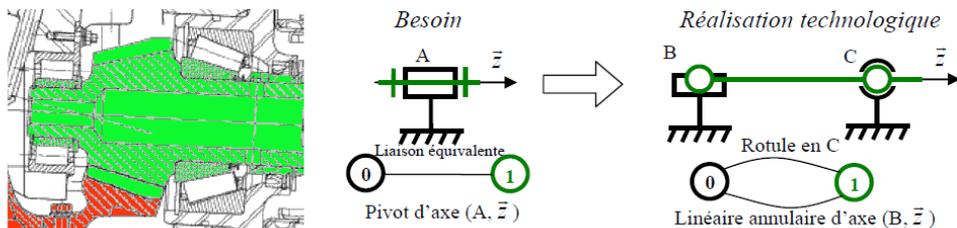
- La notion de pression de contact dans une transmission d'efforts joue un rôle prépondérant et impose le plus souvent des contacts surfaciques. Or, trois liaisons parmi les liaisons simples font intervenir des surfaces de contacts infiniment petites (la liaison ponctuelle, la liaison linéaire rectiligne et la liaison linéaire annulaire). Pour palier ce problème, ces liaisons à forte mobilité peuvent être remplacées par des liaisons surfaciques montées en séries dont la mobilité globale est la somme des mobilités des liaisons surfaciques. → Dans ce cas, on parle de **liaisons simples montées en série**.
- Il n'existe pas de liaisons simples permettant une mobilité cinématique nulle ou égale à 1. Au minimum la mobilité cinématique est égale à 2 (liaison pivot glissant) alors que c'est pourtant, dans un grand nombre de mécanismes, la majorité des liaisons rencontrées (liaison pivot, liaison glissière, liaison encastrement) → Dans ce cas, on parle de **liaisons simples montées en parallèle**.

Exemple : Modélisation en liaisons séries et liaison équivalente d'un roulement à bille à rotule.



Pour les systèmes type bras de robot, on cherche une grande mobilité cinématique avec des mouvements indépendants pouvant être pilotés chacun par un actionneur. Dans ce cas, on peut également mettre en évidence la nécessité des liaisons séries.

Exemple : Modélisation en liaisons parallèles et liaison équivalente d'un montage de roulement.



IV Construire un schéma cinématique

IV.1 Démarche de construction d'un schéma cinématique

On suppose que le modèle cinématique est donné, sous la forme d'un graphe par exemple.

La démarche pour réaliser un schéma cinématique est la suivante :

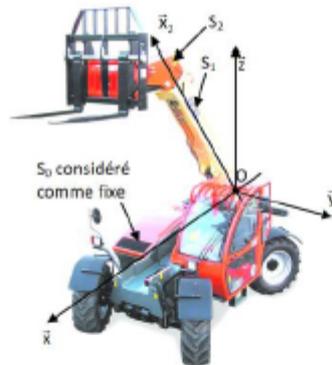
1. dessiner les éléments géométriques, centres, axes, vecteurs, des liaisons en respectant leurs positions relatives (parallélisme, perpendicularité, coïncidence...);
2. mettre en place, en s'appuyant sur le graphe des liaisons, les symboles des liaisons usuelles en utilisant un code couleur et en respectant leur orientation;
3. relier par des traits les éléments des symboles de liaisons qui sont de même couleur en respectant si possible l'architecture du système et en évitant que des traits se croisent.

S'il existe un système réel associé au modèle,

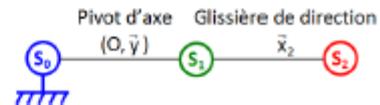
4. vérifier la cohérence entre les mouvements possibles entre les CEC sur le schéma cinématique et les mouvements observés sur le système réel.

Exemple : nacelle élévatrice

Modèle :

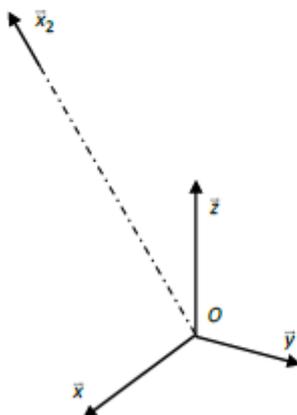


- S_0 ={roues, châssis, cabine}
- S_1 ={mât inférieur}
- S_2 ={mât supérieur, fourche}

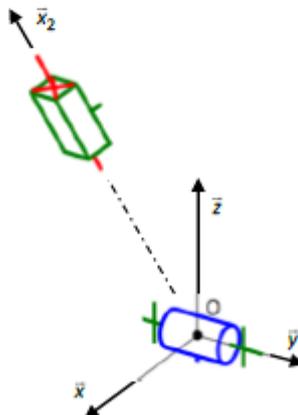


Construction du schéma cinématique :

1. dessiner les éléments géométriques



2. mettre en place les symboles en respectant l'orientation



3. relier les symboles par des traits

