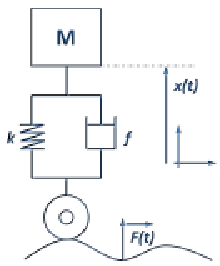
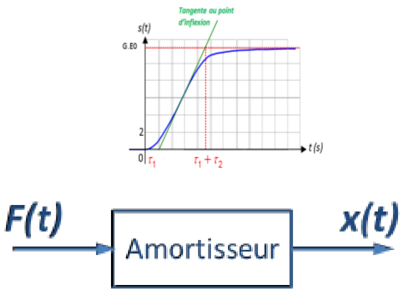
Cycle 4: Analyser, modéliser et étudier le comportement des Systèmes Linéaires Continus et Invariants

Chapitre 5 – Prévoir et identifier le comportement des systèmes fondamentaux du 2nd ordre

Amortisseur d'un véhicule automobile



Schématisation du mécanisme



Modélisation par schéma bloc

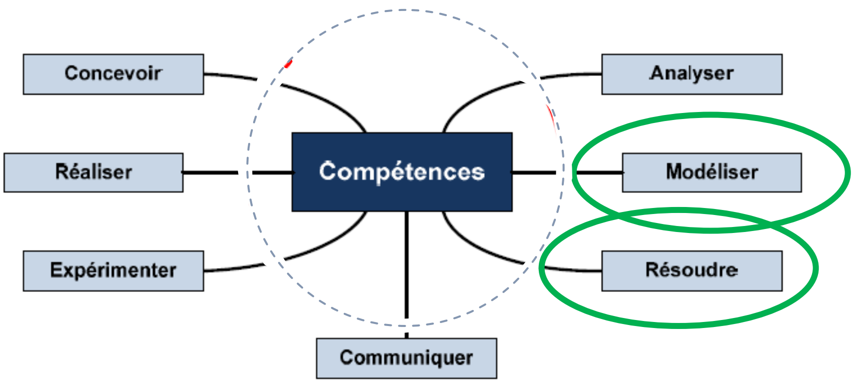
Problématique :

– Le comportement réel de certains systèmes asservis peut se modéliser par des systèmes dits du second ordre. Comment modéliser de tels systèmes ?

Savoir

Savoirs :

– Mod-C2.3 : Modèles canoniques du second ordre
  – Mod-C2-S1 : Identifier le comportement d'un système pour l'assimiler à un modèle canonique, à partir d'une réponse temporelle
  – Mod-C2-S2 : Établir un modèle de comportement à partir de relevés expérimentaux



Sommaire

1. Prévoir le comportement des systèmes du 2nd ordre 3

1.1. Définition 3
1.2. Caractéristiques de la réponse à un échelon 4

2. Comportement temporel des systèmes d'ordre quelconque 14

3. Identification à partir du modèle de comportement 15

1. Prévoir le comportement temporel des systèmes du 2nd ordre

1.1. Définition

Les systèmes du 2nd ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2s(t)}{dt^2}+\frac{2\xi}{\omega_0}\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=K\,e(t)$$

Définition

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

On note :

- K est appelé le gain statique du système (rapport des unités de S et de E) ;
- ξ (lire *xi*) est appelé coefficient d'amortissement (sans unité) ;
- ω_0 pulsation propre du système (rad/s ou s^{-1}). *qui peut se noter aussi:* ω_n

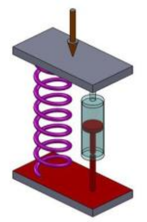
L'amortissement est parfois noté ***m* ou *z***

Schéma-bloc d'un système du second ordre :

$$E(p)\longrightarrow\boxed{\frac{K}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}}\longrightarrow S(p)$$

Exemple

Amortisseur – ressort On considère que la force $f(t)$ est l'entrée du système et que $y(t)$ est la valeur de sortie. $y(t)$ est la position mesurée par rapport à la position d'équilibre.



En isolant la masse M et en appliquant le théorème fondamental de la dynamique, on obtient :

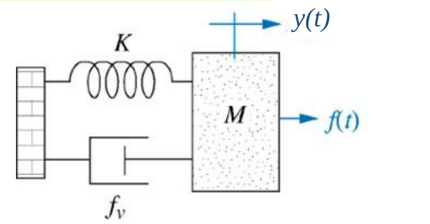
$$f(t)-k\,y(t)-\mu\dot{y}(t)=M\ddot{y}(t)$$

On obtient ainsi une équation classique de la mécanique vibratoire où on pose. En passant dans le domaine de Laplace, on a alors :

$$F(p)-k\,Y(p)-\mu p\,Y(p)=M\,p^2\,Y(p)\Longleftrightarrow F(p)=Y(p)\left(M\,p^2+k+\mu p\right)$$

On peut donc obtenir H puis sa forme canonique :

$$H(p)=\frac{Y(p)}{F(p)}=\frac{1}{k+\mu p+M\,p^2}=\frac{\frac{1}{k}}{1+\frac{\mu}{k}p+\frac{M}{k}p^2}$$



Exemple

Par identification on a donc :

$$K = \frac{1}{k} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} \qquad \xi = \frac{\mu}{2k}\sqrt{\frac{k}{M}} = \frac{\mu}{2\sqrt{kM}}$$

1.2. <u>Caractéristiques de la réponse à un ECHELON (indicielle)</u>

On a : $e(t) = E_0.u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{E_0}{p}$ et $\boxed{S(p) = H(p).E(p) = \frac{K}{1+\frac{2.\xi}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}.\frac{E_0}{p}}$

On peut mettre la fonction de transfert sous la forme : $H(p) = \frac{K.\omega_0^2}{\omega_0^2+2.\xi.\omega_0.p+p^2}$

Pour mener l'étude de la réponse indicielle, il faut tout d'abord s'intéresser aux **pôles de la fonction de transfert, solutions de l'équation** :

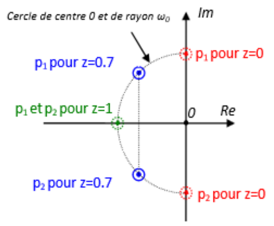
$$\boxed{\omega_0^2+2.\xi.\omega_0.p+p^2=0}$$

Le discriminant réduit est : $\Delta' = \omega_0^2.(\xi^2-1)$.

Trois cas sont alors à envisager :

- **ξ<1** $\Rightarrow \Delta' < 0$, il y a 2 racines complexes : $\boxed{p_{1,2} = -\xi.\omega_0 \pm j.\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}}$

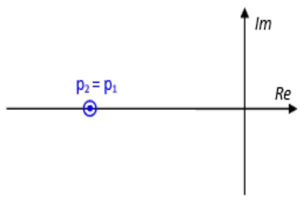
Représentation dans le plan complexe :



Cas particuliers : pôles correspondant à z=0, z=0.7 et z=1.

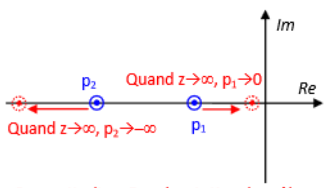
- **ξ=1** $\Rightarrow \Delta' = 0$, il y a 1 racine double : $\boxed{p_{1,2} = -\omega_0}$

Représentation dans le plan complexe :



- **ξ>1** $\Rightarrow \Delta' > 0$, il y a 2 racines réelles : $\boxed{p_{1,2} = -\xi.\omega_0 \pm \omega_0.\sqrt{\xi^2-1}}$

Représentation dans le plan complexe :



Cas particulier : Représentation des pôles correspondant à z infini.

1er cas : ξ < 1 donc le système est oscillant amorti (ou pseudo-périodique)

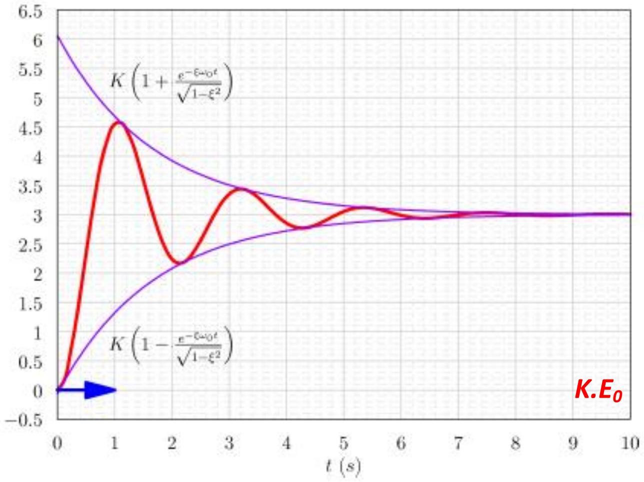
Dans ce cas, il y a 2 racines complexes:

$p_1 = -\xi.\omega_n - j.\omega_n.\sqrt{1-\xi^2}$ et $p_2 = -\xi.\omega_n + j.\omega_n.\sqrt{1-\xi^2}$.

On met S(p) sous la forme :

$$S(p) = \frac{E_0.K.\omega_n^2}{p.\left((p+\xi.\omega_n)^2+\omega_n^2.(1-\xi^2)\right)}$$

La décomposition de *S*(*p*) en éléments simples et le calcul de la transformée de Laplace inverse nous donne :



pour t ≥ 0s, $\boxed{s(t) = E_0.K.\left(1-\frac{e^{-\xi.\omega_n.t}}{\sqrt{(1-\xi^2)}}.\sin\left(\omega_n.t.\sqrt{(1-\xi^2)}+\varphi\right)\right)}$ avec $\cos(\varphi)=\xi$

Régime permanent : $E_0.K$; *Régime transitoire :* $-E_0.K.\left(\frac{e^{-\xi.\omega_n.t}}{\sqrt{(1-\xi^2)}}.\sin\left(\omega_n.t.\sqrt{(1-\xi^2)}+\varphi\right)\right)$.

La courbe admet toujours une **tangente horizontale à *t* = 0**

- **Pente à l'origine de la courbe de sortie s(t) :**

$$s'(0^+) = \lim_{t\to 0^+} s'(t) = \lim_{p\to\infty} p.[p.S(p)] = \lim_{p\to\infty} p^2.\frac{a}{p}.\frac{K.\omega_0^2}{p^2+2.z.\omega_0.p+\omega_0^2} = 0 \rightarrow \boxed{\text{Pente à l'origine} = 0}$$

Théorème de la valeur initiale

Transformée de la dérivée (CI nulles)

La tangente à l'origine est une droite horizontale [6]

La **valeur finale** tend toujours vers **K.E$_0$** (si le système est stable), *vers K si échelon unitaire.*

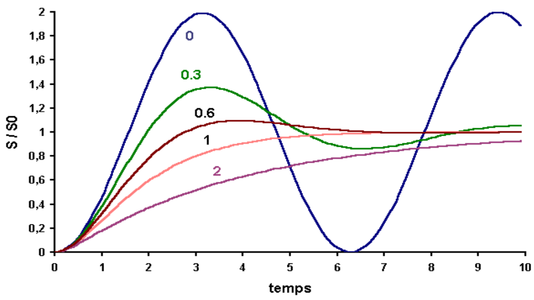
- **Ordonnée en $+\infty$ de la courbe de sortie s(t) :**

$$s(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} s(t) = \lim_{p\to 0} p.S(p) = \lim_{p\to 0} \frac{K.a.\omega_0^2}{p^2+2.z.\omega_0.p+\omega_0^2} = K.a \rightarrow \boxed{s(+\infty) = K.a}$$

Théorème de la valeur finale

Le régime établi ne dépend que du gain statique K alors que z et ω0 n'interviennent que sur le régime transitoire

On observe l'apparition d'**oscillations** autour de la valeur finale (réponse pseudo-périodique), d'autant plus amorties que ξ est élevé. **Pour $\xi = 0$, la réponse est sinusoïdale d'amplitude $2K$.**



Le système est donc oscillant amorti, la pseudo-période des oscillations est caractérisée par :

la **pseudo-pulsation ω_p :** $\boxed{\omega_P = \omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2} = \dfrac{2\pi}{T}}$

Cas particulier : $\xi = 0 \rightarrow \omega_P = \omega_n$ *d'où le nom de pulsation propre non amortie donnée à* ω_n.

La courbe est donc pseudo-périodique de **pseudo-période :** $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2}}}$

Performances d'un système du 2ème ordre en réponse indicielle en régime pseudo-périodique *avec : $\xi < 1$*

Stabilité

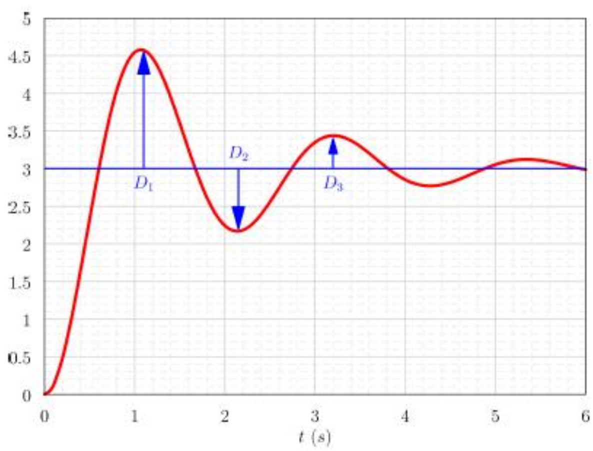
On remarque que plus **l'amortissement ξ est faible**, plus la réponse temporelle présente des **dépassements importants**. Si ξ = **0**, alors le système devient **instable**.

Lorsque ξ est inférieur à 1, la réponse indicielle génère des dépassements.

Résultat

On montre que le premier dépassement est obtenu pour :

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{T_p}{2}$$



Démonstration :

La recherche des temps des différents dépassements se fait par l'équation imposant une dérivée nulle avec :

$$s'(t) = \frac{E0.K.\omega_n^2}{\sqrt{(1-\xi^2)}}.e^{-\xi.\omega_n.t}.\sin\left(\omega_n.t.\sqrt{(1-\xi^2)}\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(\omega_n.t.\sqrt{(1-\xi^2)}\right) = 0$$

La dérivée s'annule pour : $\boxed{t_k = \dfrac{k\pi}{\omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2}}}$

Les **<u>dépassements</u>** sont alors donnés par : $D_k = s(t_k) - s(\infty)$

après simplification, on obtient: $\boxed{D_k = -E_0.K.(-1)^k.e^{-\frac{\xi.k\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}$ *(D_k est indépendant de ω_n).*

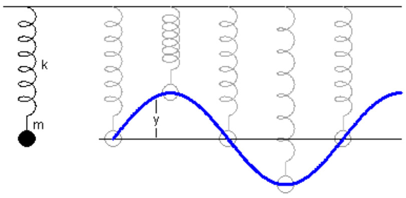
Pour le **1er dépassement**, on trouve : $\boxed{D_1 = E_0.K.e^{-\frac{\xi.\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}$ avec $t_1 = \frac{\pi}{\omega_n.\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{T}{2}$ *car* $T = \frac{2\pi}{\omega_n.\sqrt{1-\xi^2}}$

On retrouve aussi la relation pour le **1er dépassement relatif** : $\boxed{D_{1R} = \frac{D_1(\%)}{100} = \frac{s(t_1)-s(\infty)}{s(\infty)} = \frac{D_1}{E_0.K} = e^{-\frac{\xi.\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}$

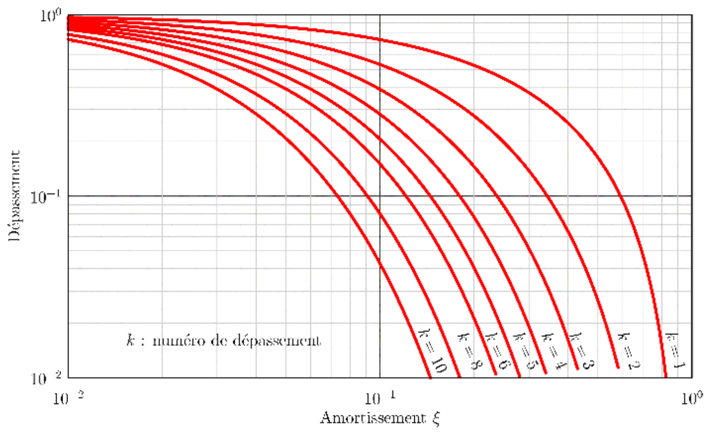
A partir de l'expression du 1er dépassement, on peut en déduire l'expression du **coefficient d'amortissement** :

$$\ln(D_1) = \frac{\xi.\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \boxed{\xi = \frac{|\ln(D_{1R})|}{\sqrt{\pi^2 + (\ln(D_{1R}))^2}}}$$

<u>Remarque</u> : **si ξ = 0 ⇒ nous avons un oscillateur parfait**



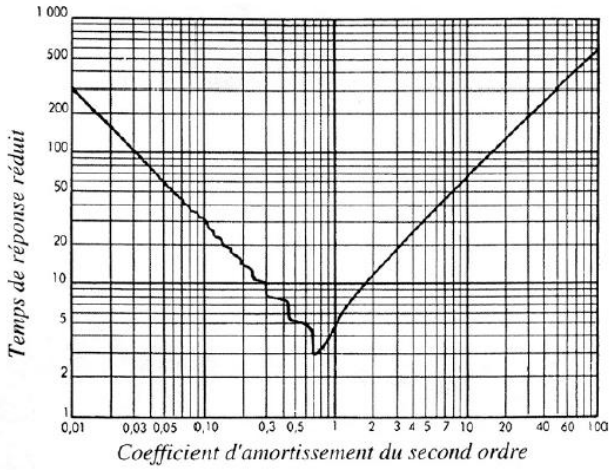
L'**abaque** ci-dessous permet de connaître la valeur du kème dépassement en fonction du facteur d'amortissement. Lorsque l'amortissement tend vers 1, on peut ainsi mettre en évidence que la valeur des dépassements est de plus en plus faible.



Rapidité

La rapidité d'un système du second ordre va se calculer par le temps de réponse à 5%. Le temps de réponse dépend de ω_0 et ξ et ne peut pas s'écrire sous une forme analytique simple.

L'abaque ci-contre donne le **temps de réponse réduit** $t_{r5\%}.\omega_0$ en fonction du coefficient d'amortissement ξ.



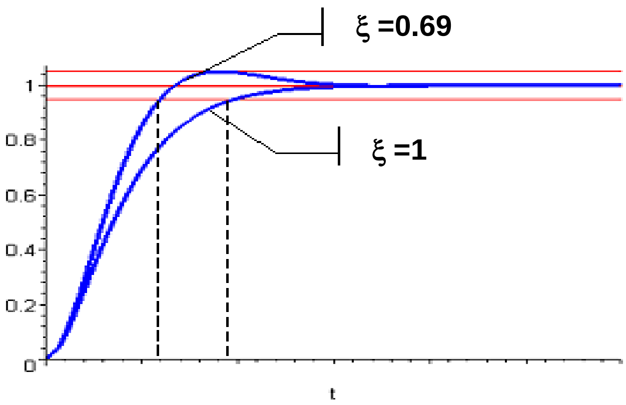
Résultat

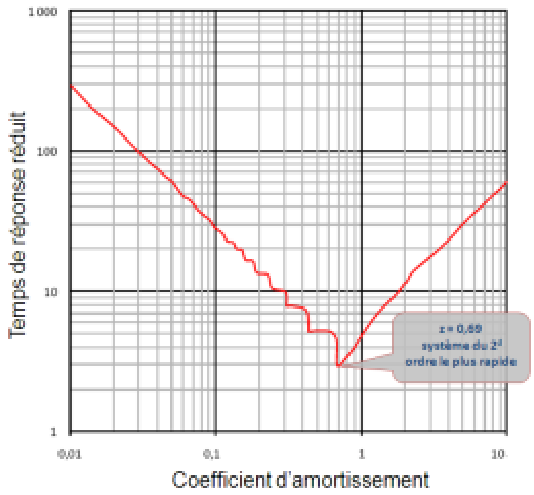
On note que le temps de réponse est minimum lorsque $\xi \simeq 0{,}7$. Dans ces conditions :

$$t_{r5\%} \cdot \omega_0 = 3$$

Remarque : le temps de **réponse minimal** à 5% d'erreur est donné pour un dépassement : $D_1 = 0{,}05.K.E_0$

En utilisant la relation $\xi = \dfrac{|\ln(D_{1R})|}{\sqrt{\pi^2 + (\ln(D_{1R}))^2}}$ définie ci-dessus, on trouve $\boxed{\textbf{Tr}_{5\%}\ \textbf{minimal pour } \xi \approx \textbf{0,69}}$





Précision

La précision est définie par **l'erreur statique** $\boldsymbol{\varepsilon_s}$ est donné pour : $\varepsilon_s = \lim_{t\to\infty}[e(t) - s(t)] = E_0 - E_0.K = \boxed{E_0.(1-K)}$

Remarque très importante : l'erreur statique n'a de sens que si e(t) et s(t) sont de même dimension.

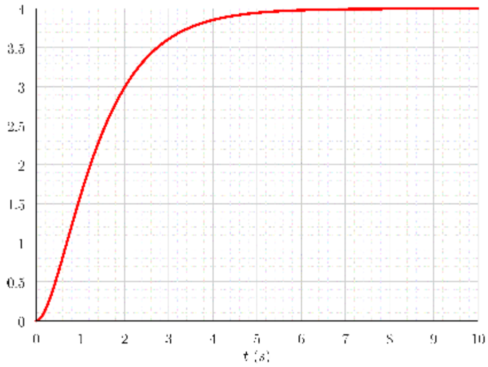
$2^{ème}$ cas : ξ > 1 donc le système est non oscillant (apériodique) et amorti

Dans ce cas, il y a **2 pôles réels**, $p_1 = -\xi.\omega_n - \omega_n.\sqrt{\xi^2-1}$ et $p_2 = -\xi.\omega_n + \omega_n.\sqrt{\xi^2-1}$.

Comme il n' y a **pas d'oscillations**, il n'est pas intéressant de rechercher une pulsation propre pour le système.

On définit alors $\boxed{\tau_1 = -\frac{1}{p_1}}$ et $\boxed{\tau_2 = -\frac{1}{p_2}}$ comme les **constantes de temps (en seconde) du système.**

Sachant que : $S(p) = H(p).E(p) = \dfrac{K}{1+\dfrac{2.\xi}{\omega_n}p+\dfrac{p^2}{\omega_n^2}}.\dfrac{E_0}{p}$,



On peut factoriser le dénominateur sous la forme :

$\boxed{S(p) = \dfrac{K.E_0}{p.(1+\tau_1.p).(1+\tau_2.p)}}$ avec : $\boxed{(\tau_1 + \tau_2) = \dfrac{2.\xi}{\omega_n}}$ et $\boxed{(\tau_1.\tau_2) = \dfrac{1}{\omega_n^2}}$ *(on peut aussi définir ξ et ω_n si besoin).*

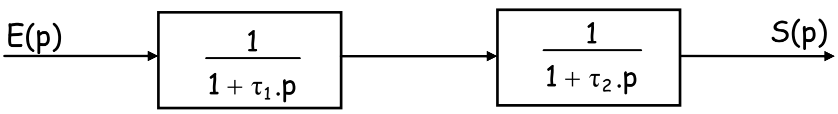
Après décomposition en 3 éléments simples, on obtient : S(p) = $= E_0.K.\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{\tau_1^2}{\tau_2-\tau_1}.\dfrac{1}{(1+\tau_1.p)}-\dfrac{\tau_2^2}{\tau_2-\tau_1}.\dfrac{1}{(1+\tau_2.p)}\right)$

En utilisant la transformée de Laplace inverse, on obtient :

pour t ≥ 0s, $\boxed{s(t) = E_0.K + \dfrac{E_0.K}{\tau_2-\tau_1}.\left(\tau_1.e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2.e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)}$

Régime permanent : $E_0.K$; *Régime transitoire :* $\dfrac{E_0.K}{\tau_2-\tau_1}.\left(\tau_1.e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2.e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)$

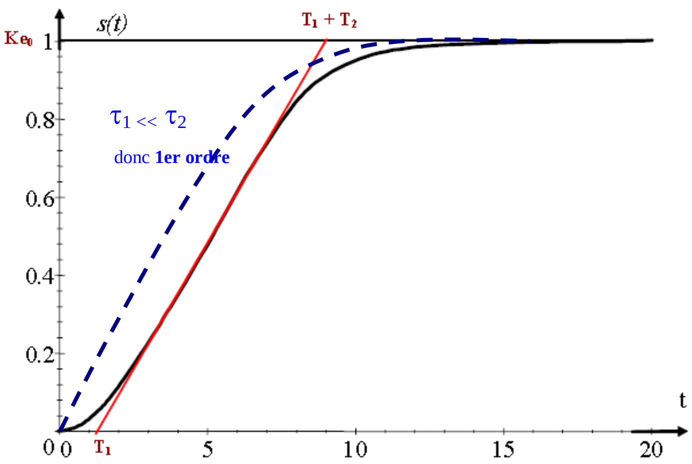
Le système peut donc être représenté par le schéma ci-dessous:



Détermination d'un second ordre : régime apériodique

<u>par identification</u>

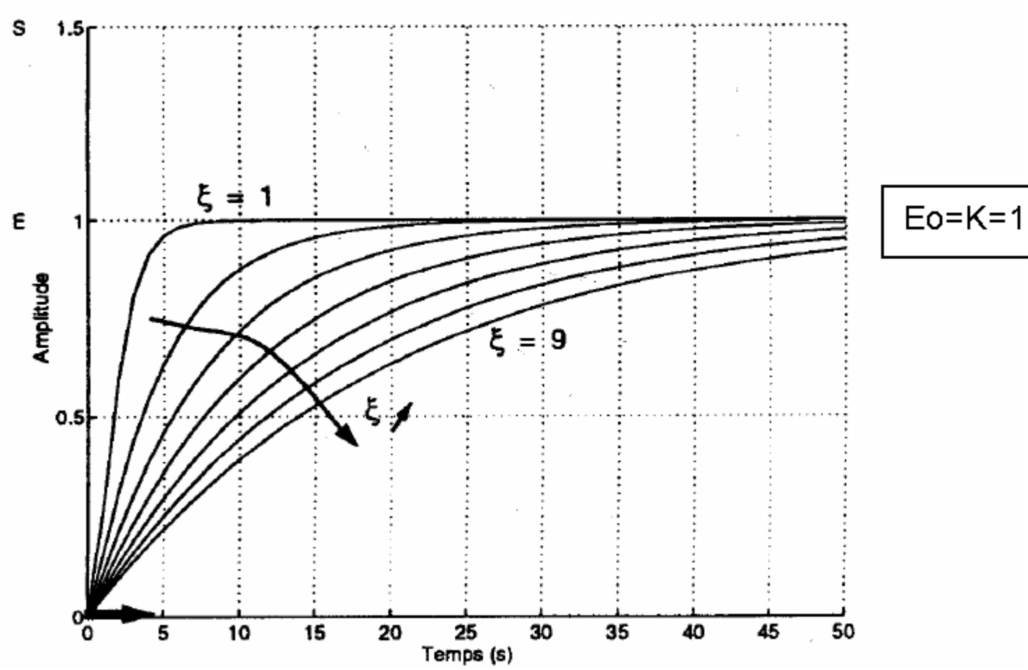
$$H(p)=\frac{K}{(1+T_1.p).(1+T_2.p)}$$



On trace la tangente au point d'inflexion et l'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses et l'asymptote horizontale, donnent les valeurs T_1 et T_2.

Il est alors nécessaire de tracer la réponse théorique pour vérifier qu'elle modélise correctement la réponse expérimentale.

<u>Avec</u> : $T_1+T_2=\frac{2.\xi}{\omega_n}$ et $(\tau_1.\tau_2)=\frac{1}{\omega_n^2}$



Eo=K=1

<u>Réponse d'un système du 2ème ordre à un échelon $e(t) = E_0.u(t)$ avec</u> **: $\xi > 1$**

<u>Attention</u>: si une **constante de temps est négligeable** devant l'autre par $\tau_1 << \tau_2$, alors le système du 2nd ordre peut être modélisé par un **1er ordre de gain statique K et de constante de temps τ_2**

$$s(t)=KE_C.\left[1-e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right].u(t) \quad , \quad S(p)=\frac{K}{1+\tau_2.p}$$

Performances d'un système du 2ème ordre en réponse indicielle en régime apériodique amorti *avec : $\xi > 1$*

Stabilité

On remarque la réponse temporelle ne présente **pas de dépassement** quand **$\xi > 1$**
Donc pour $\xi > 1$, un système du 2ème ordre est **toujours stable en réponse indicielle.**

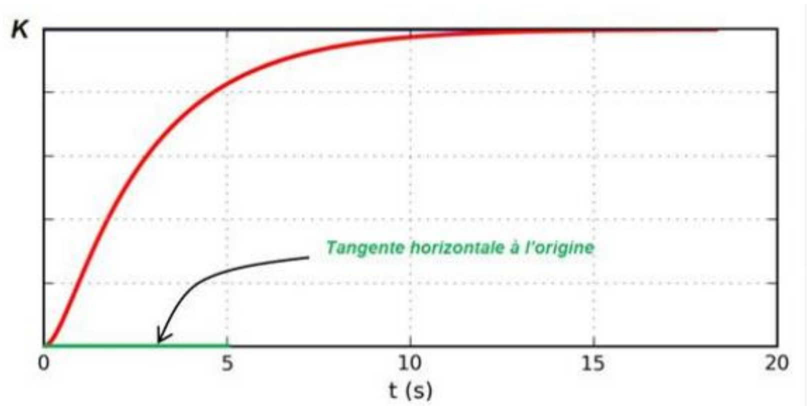
Rapidité

Le critère est le $tr_{5\%}$ sans dépassement car $\xi > 1$.
On définit le temps de réponse à 5% à l'aide de **l'abaque du temps de réponse réduit** ($Tr.\omega_n$) en fonction de (ξ ou z)

Précision

Elle est définie par **l'erreur statique ε_s** est donné pour : $\varepsilon_s = \lim_{t\to\infty}[e(t) - s(t)] = E_0 - E_0.K = \boxed{E_0.(1-K)}$

<u>Remarque très importante</u> : l'erreur statique n'a de sens que si e(t) et s(t) sont de même dimension.



La réponse indicielle d'un système du 2nd ordre caractérisé par z > 1 est comparable à celle d'un 1er ordre mise à part la tangente horizontale à l'origine.

3ème cas : ξ = 1 donc le système est non oscillant et amorti (apériodique critique)

Dans ce cas, on a une racine : $p_{1,2} = -\omega_n \Rightarrow$ on définit : $\boxed{\tau = -\dfrac{1}{p_{1,2}} = \dfrac{1}{\omega_n}}$ comme **constante de temps** (en seconde) du système.

Sachant que : $S(p) = H(p).E(p) = \dfrac{K}{1+\dfrac{2.\xi}{\omega_n}p+\dfrac{p^2}{\omega_n^2}}.\dfrac{E_0}{p}$,

On peut factoriser le dénominateur sous la forme :

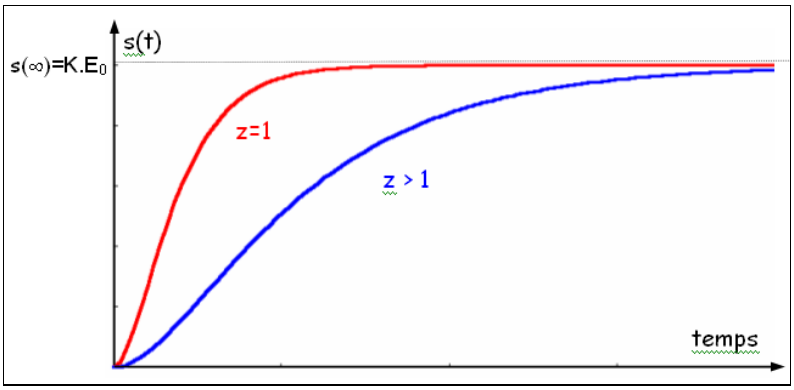
$\boxed{S(p) = \dfrac{K.E_0}{p.(1+\tau.p)^2}}$ avec : $\boxed{(2.\tau) = \dfrac{2.\xi}{\omega_n}}$ et $\boxed{(\tau^2) = \dfrac{1}{\omega_n^2}}$

Après décomposition en 3 éléments simples, on obtient : S(p) = $= E_0.K.\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{\tau}{(1+\tau.p)} - \dfrac{\tau}{(1+\tau.p)^2}\right)$

En utilisant la transformée de Laplace inverse, on obtient :

pour $t \geq 0$s, $\boxed{s(t) = E_0.K.\left(1-(1+\dfrac{t}{\tau}).e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$

Régime permanent : $E_0.K$; *Régime transitoire :* $-E_0.K.\left((1+\dfrac{t}{\tau}).e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$



- *s(0)=0*
- *Pente de la tangente à l'origine :*

  $s'(t) = E_0.K.\left((\dfrac{t}{\tau^2}).e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

  donc $s'(0) = 0$ ***(tangente horizontale à l'origine)***

- *Position du point d'inflexion pour :* $t = \tau = \dfrac{1}{\omega_n}$

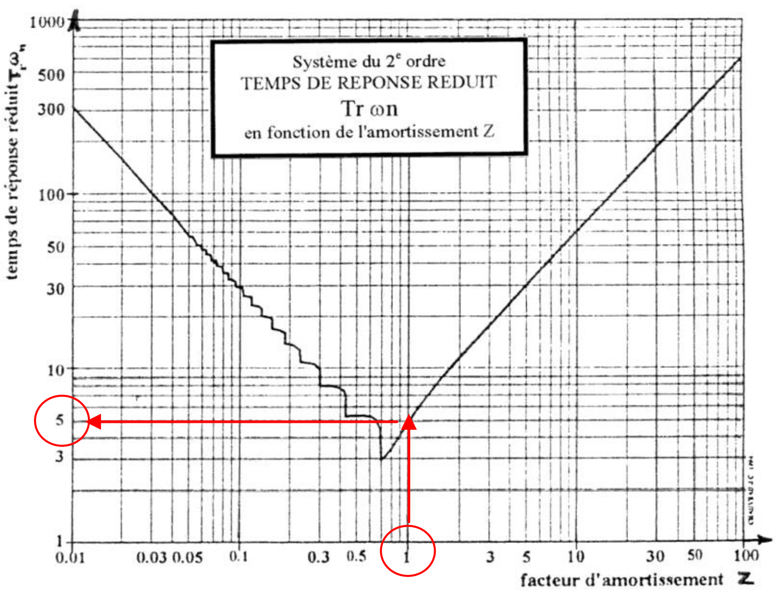
Performances d’un système du 2ème ordre en réponse indicielle en régime apériodique amorti *avec : $\xi > 1$*

Stabilité

On remarque la réponse temporelle ne présente **pas de dépassement** quand **ξ = 1**
Donc pour ξ = 1, un système du 2ème ordre est **toujours stable en réponse indicielle.**

Rapidité

Le critère est le $tr_{5\%}$ sans dépassement car ξ = 1.
La réponse **est plus rapide** que si ξ > 1 ($tr5\% = 5\omega_0$), mais l’allure de la courbe est très similaire.
On définit le temps de réponse à 5% à l’aide de **l’abaque du temps de réponse réduit** ($Tr.\omega_n$) en fonction de (ξ ou z)



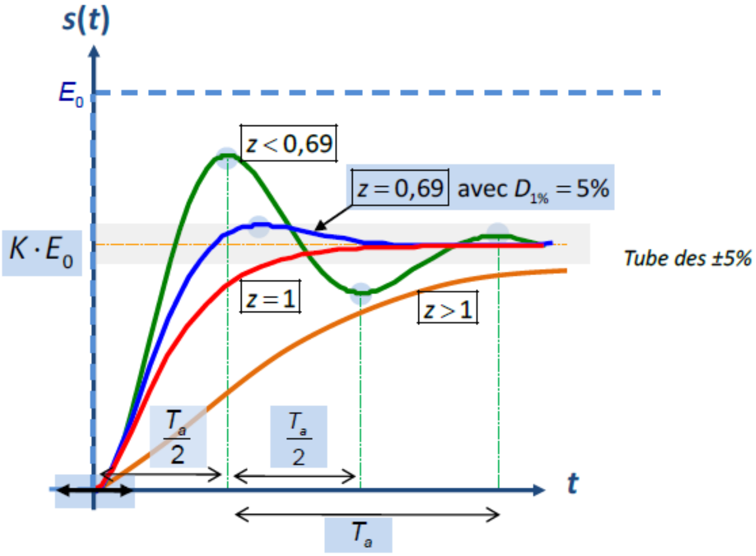
Précision

Elle est définie par **l’erreur statique ε_s** est donné pour : $\varepsilon_s = \lim\limits_{t \to \infty} [e(t) - s(t)] = E_0 - E_0.K = \boxed{E_0.(1-K)}$

Remarque très importante : l’erreur statique n’a de sens que si e(t) et s(t) sont de même dimension.

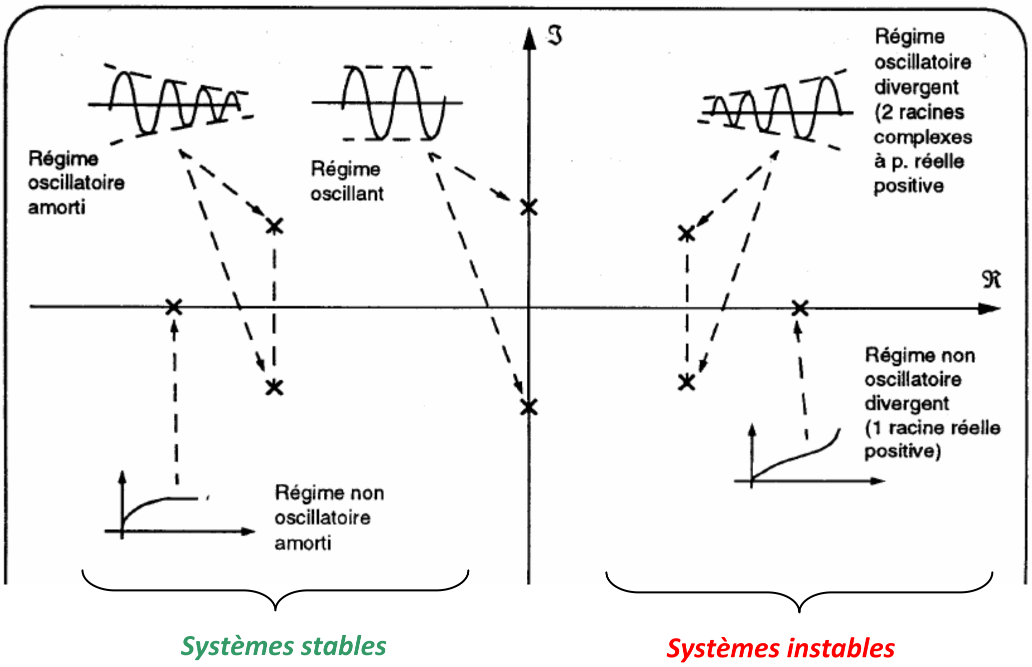
SYNTHESE:

On retiendra les résultats suivants, obtenus à partir de l'étude des équations temporelles.



2. Comportement temporel des systèmes d'ordre quelconque

Suivant la nature des pôles de la fonction de transfert, la réponse du système présentera les différentes allures suivantes :

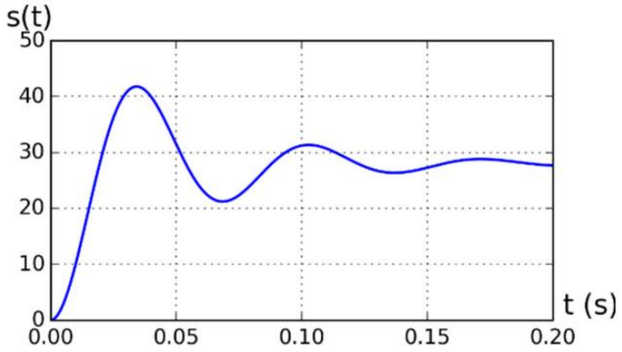


La sortie s(t) n'est stable que si les **racines du dénominateur** de la fonction de transfert *(pôles de la fonction de transfert)* **sont tous à partie réelle négative**.

3. Identification à partir du modèle de comportement

Réponse avec dépassement

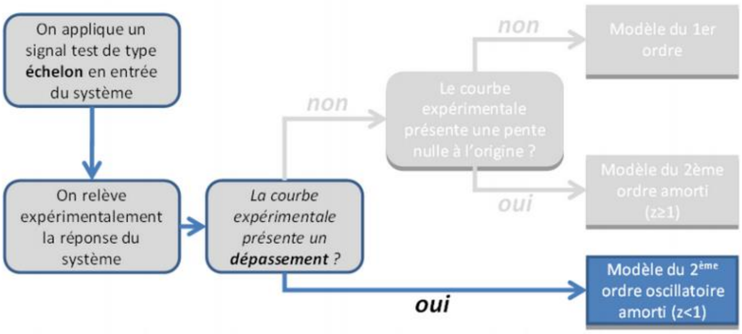
Exemple : considérons un système dont la fonction de transfert est inconnue et dont la réponse à un échelon d'amplitude E_0=2 obtenue expérimentalement, est donné ci-contre.



Elle s'apparente à la réponse d'un système du 2ème ordre : valeur finale, tangente à l'origine nulle, dépassements d'amplitudes décroissantes.

Cette simple observation permet, a priori, de proposer comme modèle de comportement du système, une fonction de transfert de la forme :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot z}{\omega_0} p + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$$



Dans ce cas-là, trois paramètres à identifier sont : le gain statique ***K***, le facteur d'amortissement **z** et la pulsation propre $\boldsymbol{\omega_0}$.

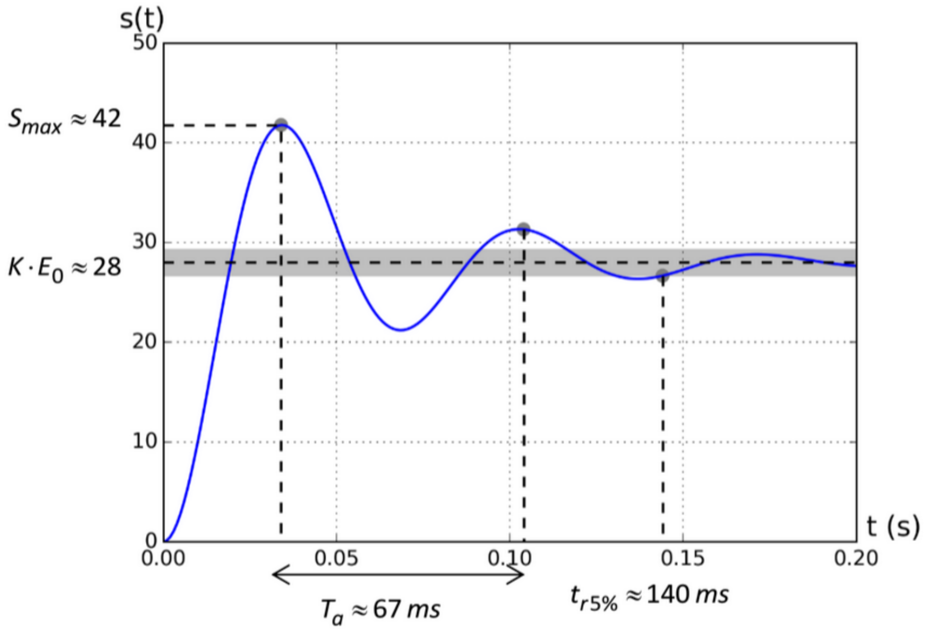
Dans le cas d'une **réponse à un échelon avec dépassement**, les caractéristiques du 2ème ordre sont identifiées ainsi :

- ***K*** à partir de la **valeur finale** et de la relation $s(+\infty) = KE_0$;
- ***z*** à partir du **premier dépassement** $\mathbf{D_{1\%}}$ et en utilisant **l'abaque** qui lie le dépassement au facteur d'amortissement **ou** avec la relation

$$D_{1\%} = e^{\frac{-z\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$$

- $\boldsymbol{\omega_0}$ à partir de la **pseudo période T_a** et en utilisant la relation $T_a = \dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$ **ou** en relevant la valeur de $\mathbf{tr_{5\%}}$ et en utilisant **l'abaque** qui lie le temps de réponse réduit $tr_{5\%} \cdot \omega_0$ et le facteur d'amortissement.

Application : à partir de la réponse expérimentale à un échelon d'amplitude 2, identifier les paramètres du système modélisé par un deuxième ordre.



A7 - Identifier la valeur de K

La valeur finale vérifie : $s(+\infty) = KE_0$, d'ou K=28/2=14

A8 - Identifier la valeur de z

On relève $D_{1\%} = \left|\frac{s_{\max} - s_\infty}{s_\infty}\right| \approx \frac{42-28}{28} \approx 50\ \%$

Sur l'abaque qui lie le dépassement au facteur d'amortissement on trouve : $z \approx 0{,}21$.

On peut aussi utiliser la formule : $0{,}5 = D_{1\%} = e^{\frac{-z\cdot\pi}{\sqrt{1-z^2}}} \Rightarrow \ln 0{,}5 = \frac{-z.\pi}{\sqrt{1-z^2}} \Rightarrow (\ln 0{,}5)^2.(1-z^2) = z^2.\pi^2$

$$\Rightarrow (\ln 0{,}5)^2 = z^2.\left(\pi^2 + (\ln 0{,}5)^2\right)$$

donc $$z \approx \sqrt{\frac{(\ln 0{,}5)^2}{\pi^2 + (\ln 0{,}5)^2}} \approx 0{,}21$$

A9 - Déterminer la pulsation amortie puis ω_0

On relève $T_a \approx 67\ ms$ et $tr_{5\%} \approx 140\ ms$

On en déduit donc que :

$$67.10^{-3} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{67.10^{-3}\sqrt{1-0{,}21^2}}$$ donc ω_0≈=95 rad/s

On peut aussi utiliser l'abaque qui lie le temps de réponse réduit $tr_{5\%} \cdot \omega_0$ et le facteur d'amortissement pour trouver ce résultat.

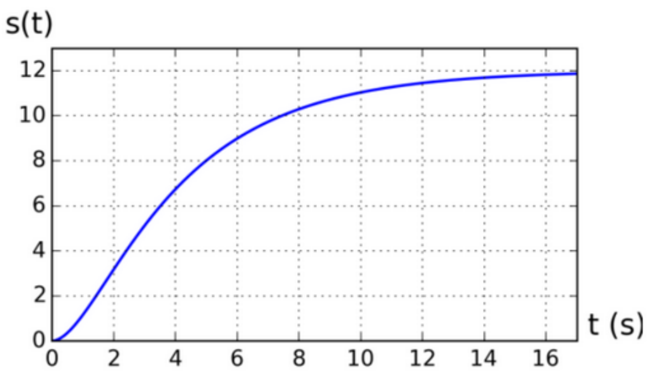
Pour $z = 0.21 \Rightarrow tr_{5\%} \cdot \omega_0 = 13 \Rightarrow \omega_0 = \frac{13}{tr_{5\%}}$ donc $\omega_0 \approx \frac{13}{140.10^{-3}} \approx 93\,\text{rad/s}$

A10 - En déduire une fonction de transfert représentative du comportement du système

$$H(p) = \frac{14}{1 + \frac{0{,}42}{95}p + \frac{p^2}{95^2}}$$

Réponse sans dépassement

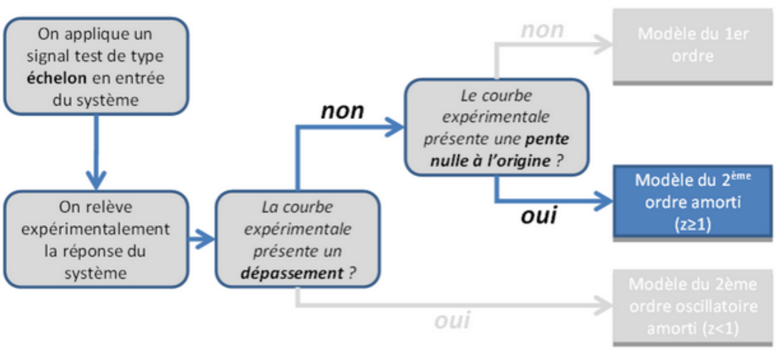
Exemple : considérons un système dont la fonction de transfert est inconnue et dont la réponse à un échelon d'amplitude $E_0 = 2$ obtenue expérimentalement, est la suivante :



Elle s'apparente à la réponse d'un système du 2ème ordre : valeur finale, pente à l'origine nulle, pas de dépassement, un seul point d'inflexion.

Cette simple observation permet, a priori, de proposer comme modèle de comportement du système, une fonction de transfert de la forme :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot z}{\omega_0} p + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$$



On est dans le cas où z≥1. Il n'y a pas de dépassement ni d'oscillations et le dénominateur de $H(p)$ admet 2 racines réelles ($\Delta \geq 0$). Il est préférable alors d'écrire la fonction de transfert sous la forme :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p)(1 + \tau_2 \cdot p)}$$

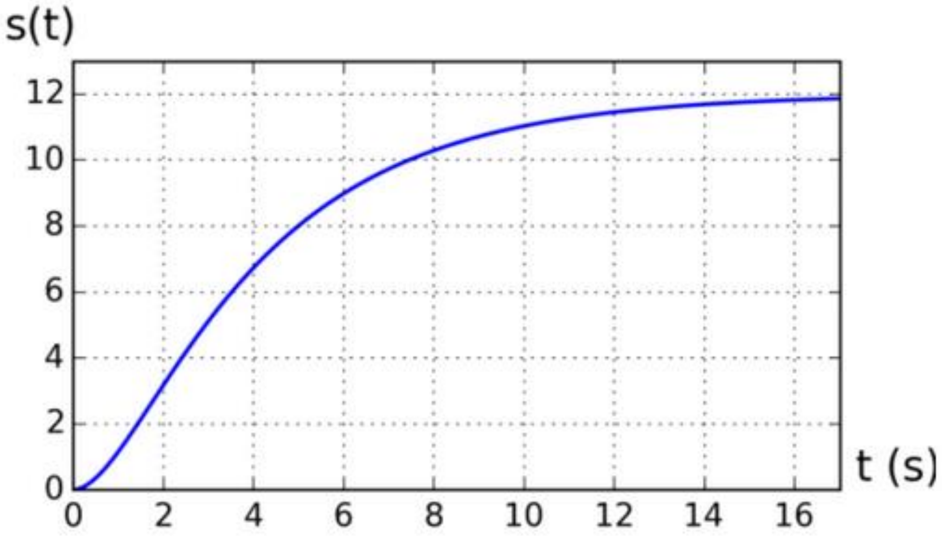
Dans ce cas-là, trois paramètres à identifier sont : le gain statique ***K***, les deux constantes de temps τ_1 et τ_2 **(1)** .

Dans le cas d'une **réponse à un échelon sans dépassement**, mais avec **pente nulle à l'origine**, les caractéristiques du 2ème ordre sont identifiées en supposant que pour *t* suffisamment grand, la courbe est assimilable à un **premier ordre de constante de temps τ_2, avec un retard τ_1**. Les caractéristiques sont déterminées ainsi :

- ***K*** à partir de la valeur finale ;
- **τ1 et τ2** à partir de la **tangente à la courbe au point d'inflection**

Application : à partir de la réponse expérimentale à un échelon d'amplitude 2, identifier les paramètres du système modélisé par un deuxième ordre.

A11 - Déterminer les constantes de temps.



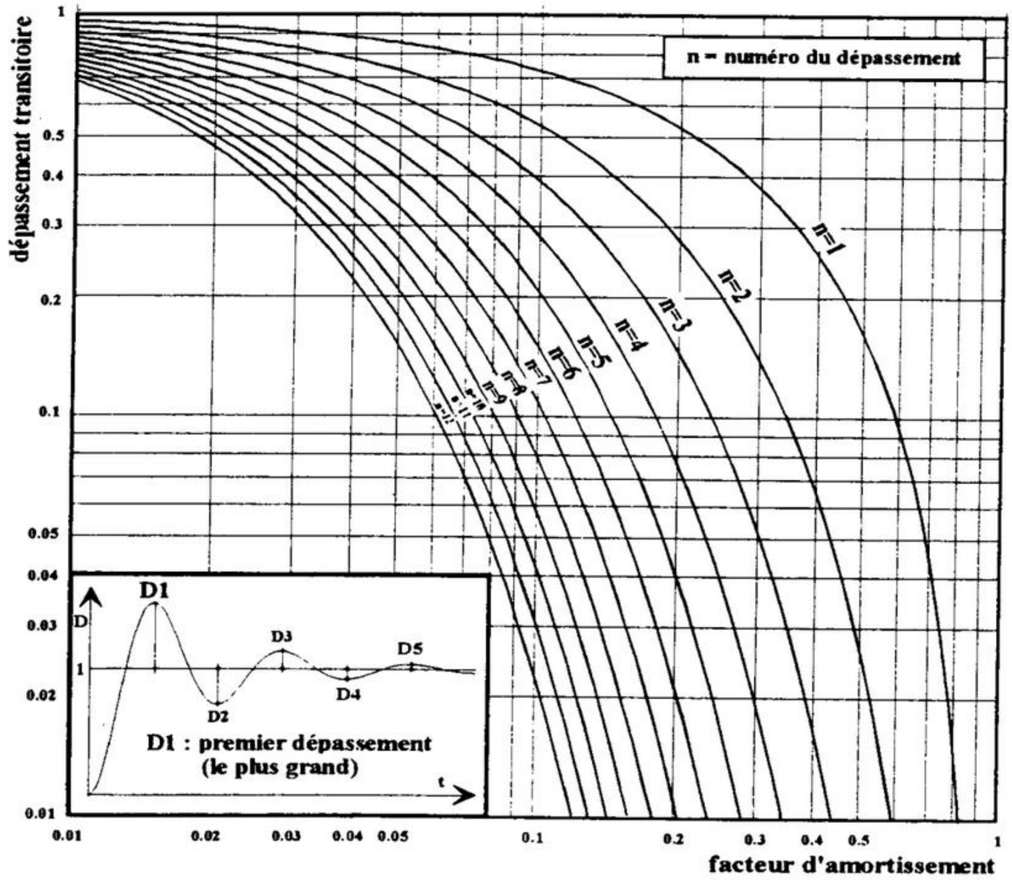
A12 - Déterminer la fonction de transfert et les caractéristiques de la fonction

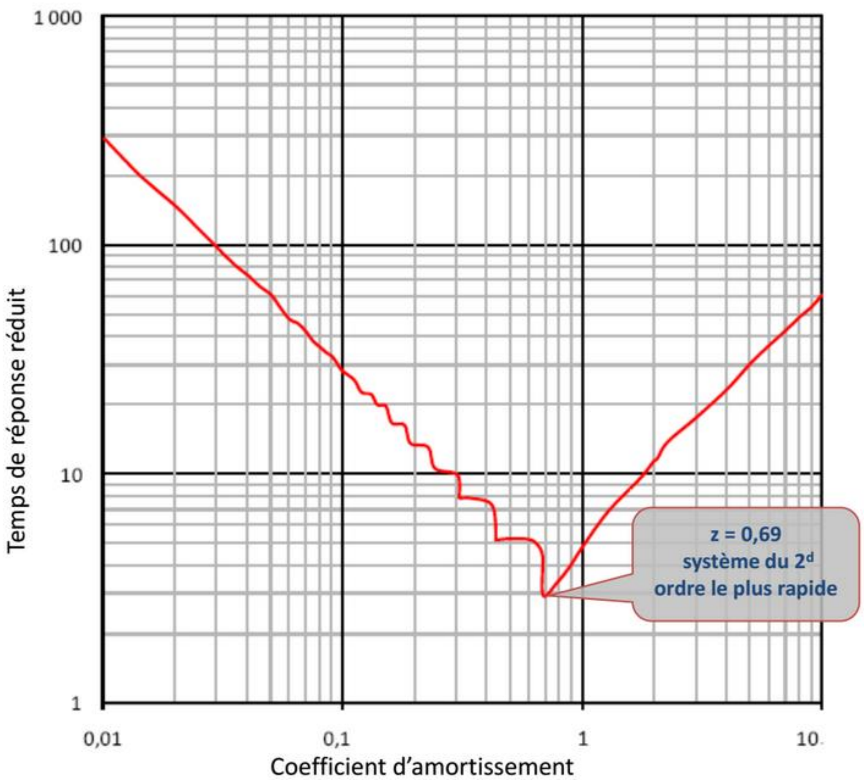
$K = s(+\infty)/E_0 \approx 6$ d'ou :

Réponse sans dépassement avec pôle dominant $\tau_1 << \tau_2$

Lorsqu'une constante de temps est négligeable devant l'autre, la réponse temporelle à un échelon d'un système du 2[ème] ordre amorti modélisé par $H(p) = \frac{K}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$ est proche de la réponse temporelle à un échelon d'un système du 1[er] ordre modélisé par $H(p) = \frac{K}{(1+\tau_2 p)}$.

Abaques


dépassement transitoire
n = numéro du dépassement
n=1
n=2
n=3
n=4
n=5
n=6
n=7
n=8
n=9
D1
D2
D3
D4
D5
D1 : premier dépassement
(le plus grand)
facteur d'amortissement
1
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
1


Temps de réponse réduit
Coefficient d'amortissement
1 000
100
10
1
0,01
0,1
1
10
z = 0,69
système du 2d
ordre le plus rapide