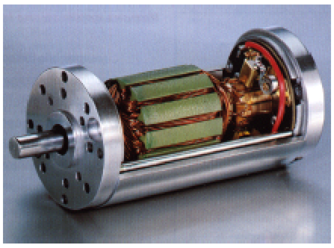
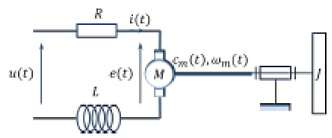
Cycle 4: Analyser, modéliser et étudier le comportement des Systèmes Linéaires Continus et Invariants

Chapitre 3 – Modélisation des SLCI - Schémas blocs et Fonction de transfert



Moteur à courant continu



Schématisation

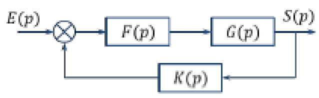


Schéma bloc

On a vu précédemment que les équations différentielles régissant le comportement d'un système peuvent être transformées dans le domaine de Laplace dans le but d'être résolues.

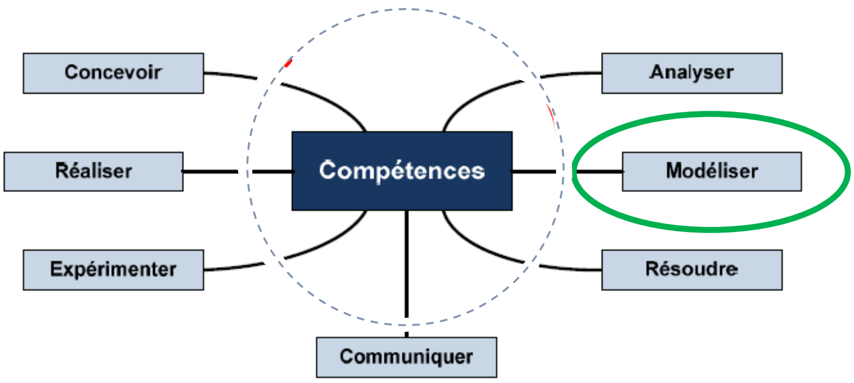
La complexité des systèmes nous poussent à utiliser une représentation schématique : les schémas blocs. Il faudra alors déterminer le lien entre cette représentation et la représentation dans le domaine de Laplace.

Problématique

- Comment modéliser un système complexe multiphysique en utilisant la modélisation en schéma bloc et la modélisation dans le domaine de Laplace ?
- Comment déterminer la fonction de transfert d'un système dans le but de prévoir son comportement ?

Savoir

- Modéliser :
  - Mod-C4.1 : Représentation par schéma bloc
  - Mod-C4.2 : Fonction de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée
  - Mod-C4.3 : Classe d'un système
  - Mod-C4-S1 : Établir le schéma-bloc du système
  - Mod-C4-S2 : Déterminer les fonctions de transfert du système en boucle ouverte et en boucle fermée.
- Résoudre :
  - Rés-C5-S1 : Schéma bloc ou d'une fonction de transfert les grandeurs caractérisant les performances du modèle



Sommaire

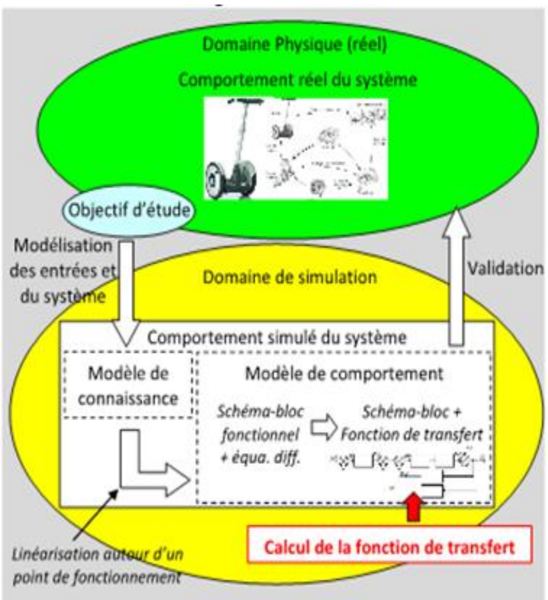
1. Place de la fonction de transfert dans la démarche d'étude des SLCI

Reprenons la démarche d'étude des SLCI et appliquons là sur l'exemple du Segway que l'on a appris à modéliser. On se fixe comme objectif d'étude d'établir un **modèle de comportement** du Segway pour **vérifier des performances** vis-à-vis du CDC.

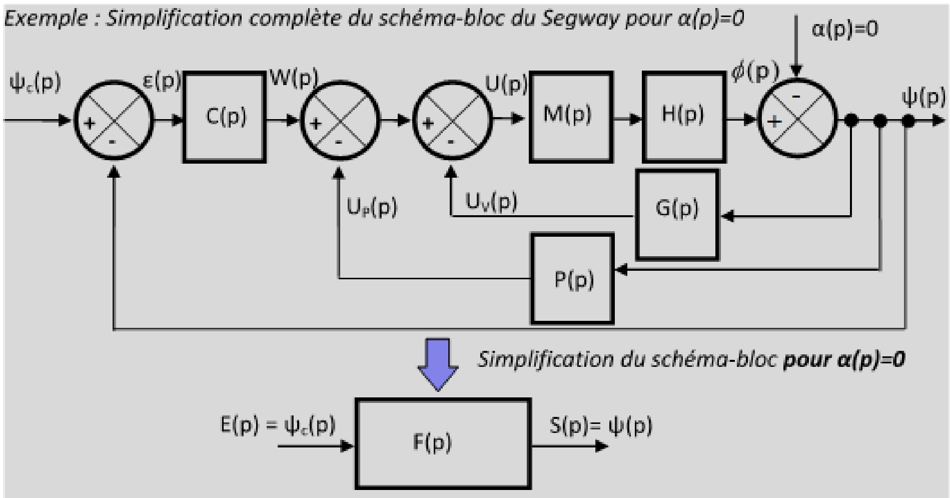
Après la phase de **modélisation des entrées** ainsi que du **système lui-même**, on obtient un **modèle de connaissance**. Il est représenté par une **équation différentielle** et schématisé par un **schéma bloc fonctionnel** complexe.

C'est à partir de la **transformation de Laplace** que l'on obtient une équation polynomiale qui nous permettra d'obtenir la **fonction de transfert (FT).**

Elle permet de caractériser le **comportement intrinsèque du système.**



Pour déterminer la FT d'un SLCI constitué de plusieurs blocs suivant une structure complexe, il faut **manipuler et simplifier le schéma bloc** *(attention, cette méthode éloigne le modèle de la réalité physique du système).*



2. Représentation des SLCI par fonction de transfert

On a vu précédemment que le modèle traduisant la relation entre l'entrée e(t) et la sortie s(t) d'un SLCI était, dans la grande majorité des cas, une équation différentielle.

$$e(t) \Rightarrow \boxed{a_n \frac{d^n s}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + \ldots + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e(t)} \Rightarrow s(t)$$

En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de cette équation et **en considérant les conditions initiales nulles**, on a :

$$a_n \cdot p^n \cdot S(p) + ... + a_1 \cdot p \cdot S(p) + a_0 \cdot S(p) = b_m \cdot p^m \cdot E(p) + ... + b_1 \cdot p \cdot E(p) + b_0 \cdot E(p)$$

Soit : $$\left[a_n \cdot p^n + ... + a_1 \cdot p + a_0 \right] S(p) = \left[b_m \cdot p^m + ... + b_1 \cdot p + b_0 \right] E(p)$$

d'où : $$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\left[b_m \cdot p^m + ... + b_1 \cdot p + b_0 \right]}{\left[a_n \cdot p^n + ... + a_1 \cdot p + a_0 \right]} = \frac{\sum_0^m b_i \cdot p^i}{\sum_0^n a_i \cdot p^i}$$

On appelle **fonction de transfert cette fraction**.
On utilisera le terme de fonction de transfert pour un système, alors qu'on parlera de **transmittance pour un élément.**

La **fonction de transfert**[1] caractérise un **SLCI** de façon indépendante de l'entrée qui lui est appliquée. Elle ne dépend que de la variable symbolique p et des paramètres du système.

La fonction de transfert est une **fraction de deux polynômes** de variable p.

Si $H(p)$ est une fonction de transfert, $\boxed{S(p) = H(p) \cdot E(p)}$

$$E(p) \Rightarrow \boxed{H(p)} \Rightarrow S(p)$$

3. Forme canonique d'une fonction de transfert : gain statique, ordre et classe, pôles et zéros

La FT est une fraction rationnelle de 2 polynômes qu'il est possible de factoriser :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = K \frac{\overbrace{(p - z_m)(p - z_{m-1}) \cdots (p - z_0)}^{z_i : \text{"zéros" de la fonction de transfert}}}{\underbrace{(p - p_n)(p - p_{n-1}) \cdots (p - p_0)}_{p_i : \text{"pôles" de la fonction de transfert}}} \qquad K : \textit{gain statique}$$

- *Les **zéros** sont les racines complexes du numérateur de la FT*
- *Les **pôles** sont les racines complexes du dénominateur de la FT*

Une fonction de transfert sous **forme canonique** est de la forme :

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{1 + \dots p + \dots p^2 + \dots + \dots p^m}{1 + \dots p + \dots p^2 + \dots + \dots p^{n-\alpha}} \qquad \alpha : \textit{classe du système} \quad n : \textit{ordre du système}$$

Lorsque α=1, on dit que le système possède un intégrateur. Cela vient du fait que l'on peut écrire la FT : $H(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{A(p)}{B(p)}$
avec 1/p transformée de Laplace d'une intégrale.

Application 1 : $H(p)=\dfrac{2+3\cdot p+5\cdot p^2}{3\cdot p^2+4\cdot p^3+7\cdot p^5}$

$$H(p)=\frac{2+3.p+5.p^2}{3.p^2+4.p^3+7.p^5}$$

$$\xrightarrow[\text{canonique}]{\text{forme}} H(p)=\frac{2}{3.p^2}\cdot\frac{1+\frac{3}{2}.p+\frac{5}{2}.p^2}{1+\frac{4}{3}.p+\frac{7}{3}.p^3}$$

ordre : 5

classe : 2

gain statique : $\frac{2}{3}$

Application 2 : Moteur à courant continu $H(p)=\dfrac{1}{k_e+\frac{R\cdot J}{k_C}p+\frac{L\cdot J}{k_C}p^2}$

$$H(p)=\frac{1}{k_e+\frac{R\cdot J}{k_C}p+\frac{L\cdot J}{k_C}p^2}$$

$$\xrightarrow[\text{canonique}]{\text{forme}} H(p)=\frac{1}{k_e}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{R\cdot J}{k_e\cdot k_C}p+\frac{L\cdot J}{k_e\cdot k_C}p^2\right)}$$

ordre : 2

classe : 0

gain statique : $\frac{1}{k_e}$

Quelle est la vitesse de rotation $\omega(+\infty)$ en valeur finale, d'un moteur à courant continu soumis à un échelon de tension U_0 ?

Dans le domaine de Laplace, la sortie est : $\Omega(p)=H(p)\cdot U(p)$.

L'entrée est un échelon d'amplitude U_0 de transformée : $U(p)=\dfrac{U_0}{p}$

d'où : $\Omega(p)=\dfrac{U_0}{p}\dfrac{1}{k_e+\frac{R\cdot J}{k_C}p+\frac{L\cdot J}{k_C}p^2}$

Par le théorème de la valeur finale on obtient :

$$\omega(+\infty)=\lim_{t\to+\infty}\omega(t)=\lim_{t\to 0}\left(p\cdot\Omega(p)\right)=\lim_{t\to 0}p\cdot\frac{U_0}{p}\frac{1}{k_e+\frac{R\cdot J}{k_C}p+\frac{L\cdot J}{k_C}p^2}=\lim_{t\to 0}\frac{U_0}{k_e+\frac{R\cdot J}{k_C}p+\frac{L\cdot J}{k_C}p^2}$$

$$=\frac{U_0}{k_e}$$

4. Représentation par schémas blocs

Le schéma fonctionnel, ou **schéma bloc**, est ainsi une représentation graphique du système d'équations différentielles, ou des relations entre les variables que décrit le système d'équations différentielles.

Méthode

Pour établir un schéma fonctionnel la démarche est la suivante :

1. Appliquer la transformée de Laplace à chaque équation du système différentiel : on obtient alors un système d'équations linéaires dans le domaine de Laplace, que va traduire le schéma.
2. Rechercher les fonctions de transfert élémentaires et les variables qu'elles relient.
3. Constituer, tracer les schémas en assemblant les blocs des fonctions de transfert élémentaires.
4. Rassembler les schémas, simplifier à l'aide des règles définies un peu plus tard.

La représentation par le schéma fonctionnel et la fonction de transfert permettent ainsi de **déterminer les caractéristiques principales du système sans résoudre d'équations différentielles**.

4.1. Schémas blocs et FT des systèmes simples

Pour les équations "simples" de la physique, on peut aisément mettre les théorèmes fondamentaux sous forme de schémas blocs et de fonctions de transfert.

- *Théorèmes de la mécanique*

Théorème de la résultante dynamique (position)	*Exemple : Mouvement d'un solide en translation*	$F(t)=M\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$	$F(p)=Mp^2X(p)$	$F(p) \rightarrow \boxed{\dfrac{1}{Mp^2}} \rightarrow X(p)$
Théorème de la résultante dynamique (vitesse)		$F(t)=M\dfrac{dv(t)}{dt}$	$F(p)=MpV(p)$	$F(p) \rightarrow \boxed{\dfrac{1}{Mp}} \rightarrow V(p)$
Théorème du moment dynamique (position)	*Mouvement d'un solide en rotation*	$C(t)=J\dfrac{d^2\theta(t)}{dt^2}$	$C(p)=Jp^2\Theta(p)$	$C(p) \rightarrow \boxed{\dfrac{1}{Jp^2}} \rightarrow \Theta(p)$
Théorème du moment dynamique (vitesse)		$C(t)=J\dfrac{d\omega(t)}{dt}$	$C(p)=Jp\Omega(p)$	$C(p) \rightarrow \boxed{\dfrac{1}{Jp}} \rightarrow \Omega(p)$

Remarque

On note :

- $C(t)$: le couple exprimé en Nm
- J : l'inertie exprimée en $kg.m^2$
- θ : position angulaire en rad
- ω : vitesse angulaire en rad/s

Modélisation des SLCI - Schémas blocs et fonction de transfert

- *Lois de frottement visqueux*

Frottements visqueux pour des solides en translation		$f(t)=f\frac{dx(t)}{dt}$	$F(p)=f\,p\,X(p)$	$F(p)\rightarrow\boxed{\frac{1}{fp}}\rightarrow X(p)$
Frottements visqueux pour des solides en rotation	*Frottements dans les paliers d'un moteur à courant continu*	$C(t)=f\frac{d\theta(t)}{dt}$	$C(p)=f\,p\,\Theta(p)$	$C(p)\rightarrow\boxed{\frac{1}{fp}}\rightarrow \Theta(p)$

- *Lois de comportement des ressorts*

Ressorts en compression de raideur k		$f(t)=k\,x(t)$	$F(p)=k\,X(p)$	$F(p)\rightarrow\boxed{\frac{1}{k}}\rightarrow X(p)$
Ressorts en traction de raideur k		$C(t)=k\theta(t)$	$C(p)=k\Theta(p)$	$C(p)\rightarrow\boxed{\frac{1}{k}}\rightarrow \Theta(p)$

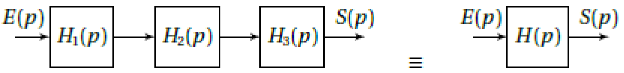
- *Systèmes électriques*

Résistor		$u(t)=R\,i(t)$	$U(p)=R\,I(p)$	$I(p)\rightarrow\boxed{R}\rightarrow U(p)$
Condensateur		$u(t)=\frac{1}{C}\int i(t)dt$	$U(p)=\frac{1}{Cp}I(p)$	$I(p)\rightarrow\boxed{\frac{1}{Cp}}\rightarrow U(p)$
Inductance		$u(t)=L\frac{di(t)}{dt}$	$U(p)=L\,p\,I(p)$	$I(p)\rightarrow\boxed{Lp}\rightarrow U(p)$

–

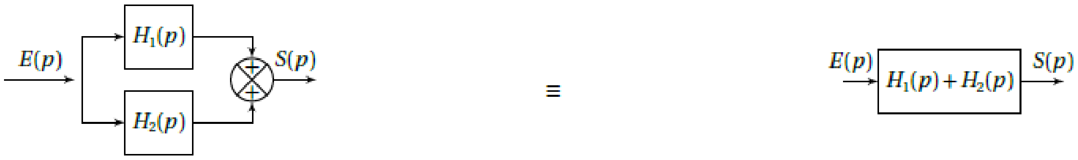
4.2. Manipulation des schémas blocs

- *Blocs en série*



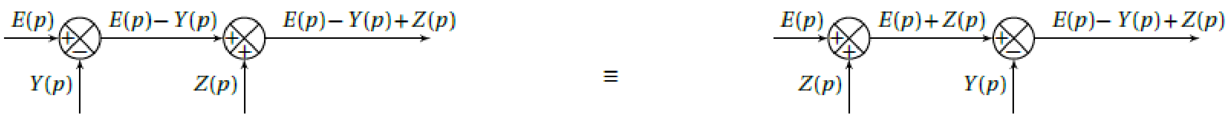
$$H(p) = H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_3(p)$$

- *Blocs en parallèle*



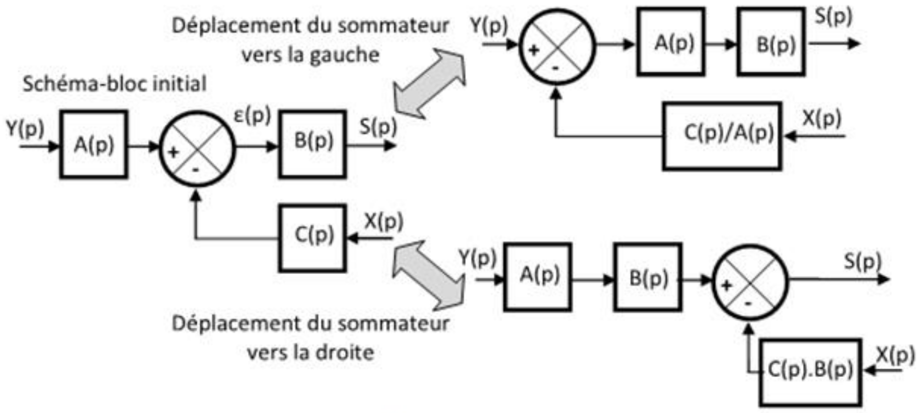
$$S(p) = H_1(p) \cdot E(p) + H_2(p) \cdot E(p)$$
$$H(p) = H_1(p) + H_2(p)$$

- *Comparateurs en série*



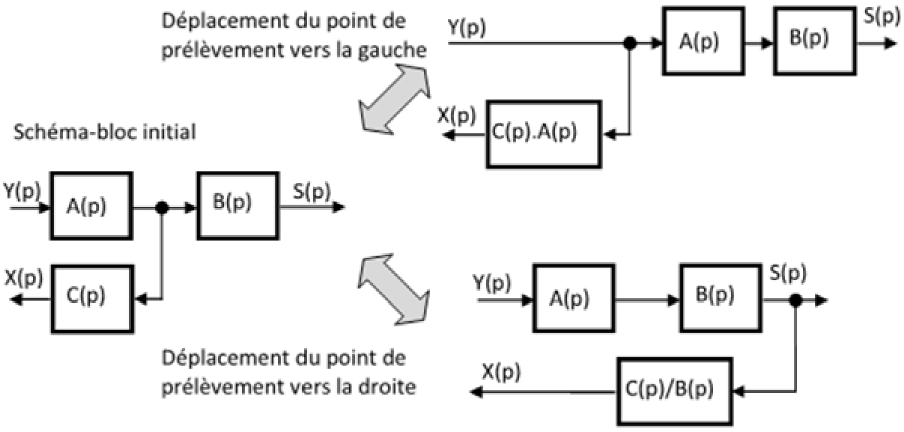
- *Déplacement des sommateurs*

Le déplacement peut se faire vers la gauche ou vers la droite et il faut faire attention au bloc rajouté dans la branche déplacée.



- *Déplacement des blocs*

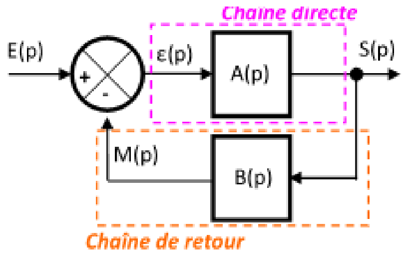
Le déplacement peut se faire vers la gauche ou vers la droite mais il faut faire attention au bloc rajouté dans la branche déplacée.



5. Fonction de transfert des systèmes bouclés

Il peut être parfois intéressant de modifier un diagramme fonctionnel en vue de simplifier les calculs de fonctions de transfert. Pour cela quelques règles sont à respecter. Les manipulations suivantes n'ont pas forcément de sens physique, mais sont symboliques.

Après manipulations sur le schéma-bloc du système complexe, on arrive toujours à un/des système(s) bouclé(s) dont la forme générique est la suivante :



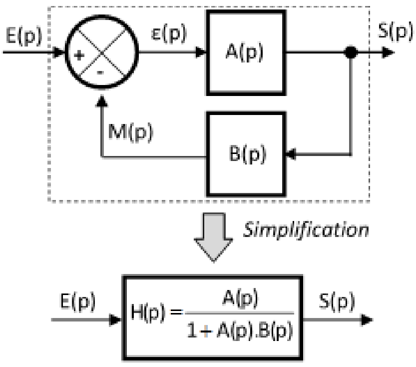
Cette forme générique est à connaitre, c'est une **boucle FERMEE.**

On y retrouve :

- *ε(p) qui est l'écart entre M(p) de la chaine de retour et E(p) en entrée*
- *A(p) qui est la FT en chaine directe*
- *B(p) qui est la FT de la chaine de retour*
- *M(p) qui est le produit entre la sortie S(p) et la FT de chaine retour.*

5.1. Fonction de transfert en Boucle Fermée (FTBF)

On définir la FTBF pour caractériser le comportement global du système.



Par définition : $H(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)}$

avec $S(p) = \varepsilon(p).A(p)$

$\varepsilon(p) = E(p) - M(p,$

et $M(p) = B(p).S(p)$

d'où : $S(p) = \big(E(p) - M(p)\big).A(p)$

$S(p) = \big(E(p) - B(p).S(p)\big).A(p)$

$S(p).\big(1 + B(p).A(p)\big) = E(p).A(p)$

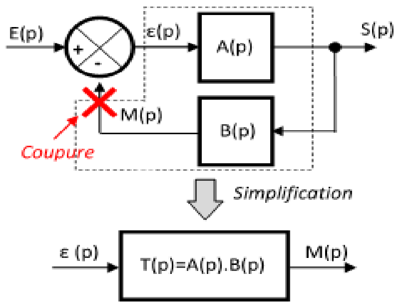
Soit : $\boxed{H(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)} = \dfrac{A(p)}{1 + A(p).B(p)}}$

$H(p)=\dfrac{S(p)}{E(p)}=\dfrac{A(p)}{1+A(p).B(p)}$ **est appelée fonction de transfert en boucle fermée (FTBF), elle caractérise le comportement global du système boucle fermée.**

Attention aux signes dans le comparateur !!!! Si le signe – de M(p) dans le comparateur est remplacé par un + la formule devient $H(p)=\dfrac{S(p)}{E(p)}=\dfrac{A(p)}{1-A(p).B(p)}$.

On utilise la FTBF pour étudier les réponses temporelles **s(t)** d'un système à des entrées **e(t)** quelconques. Ces études permettent ensuite d'analyser les performances du système bouclé.

5.2. Fonction de transfert en Boucle Ouverte (FTBO)



La fonction de transfert en boucle ouverte est définie comme la fonction de transfert du système lorsque le **retour sur le sommateur est coupé**. Dans le cas de la FTBO, on ne s'intéresse pas à la sortie S(p) mais à la mesure M(p) en fonction de ε(p).

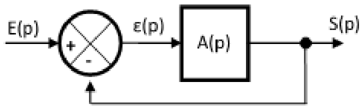
La FTBO correspond au produit de tous les blocs de la boucle :

$$\boxed{T(p)=\frac{M(p)}{\varepsilon(p)}=A(p).B(p)}$$

- La FTBO est utilisée principalement pour déterminer les conditions de stabilité du système boucle fermée
- Si la structure du schéma-bloc est complexe, on peut définir des FTBO et FTBF intermédiaires pour tous les sous-systèmes à boucle fermée, mais seules la FTBF et la FTBO de la boucle principale sont intéressantes.
- Dans la pratique on calcule simplement la FTBF à partir de la FTBO grâces aux relations suivantes :

$$\boxed{FTBF=\frac{\text{FT de la chaine directe}}{1+FTBO}=\frac{1}{\text{FT de la chaine de retour}}\cdot\frac{FTBO}{1+FTBO}}$$

5.3. Fonction de transfert d'un système à retour unitaire

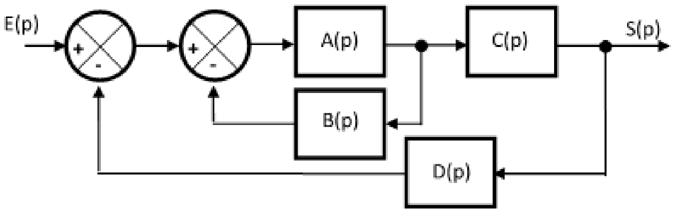


Un système asservi peut toujours être mis sous la forme d'un système à retour unitaire si l'entrée E(p) et la sortie S(p) sont comparables.

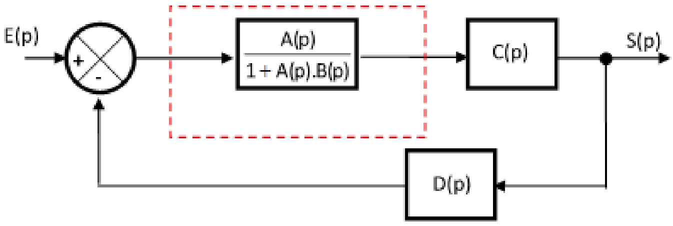
L'avantage pratique d'un tel système est que la FTBF est calculée très facilement à partir de la FTBO : $H(p)=\dfrac{S(p)}{E(p)}=\dfrac{A(p)}{1+A(p)}=\dfrac{FTBO}{1+FTBO}$.

6. Algèbre des schémas blocs

6.1. Systèmes à boucles concentriques

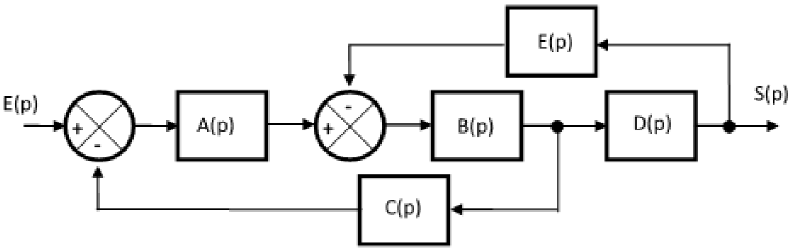


Pour ce type de système, il faut toujours commencer par calculer la FTBF de la boucle interne.

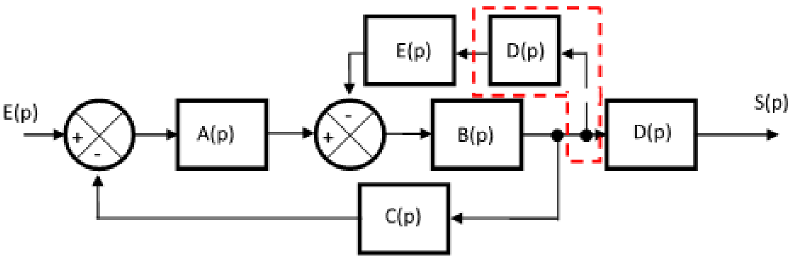


On reconnait ensuite une boucle fermée que l'on sait bien traiter.

6.2. Systèmes à boucles imbriquées



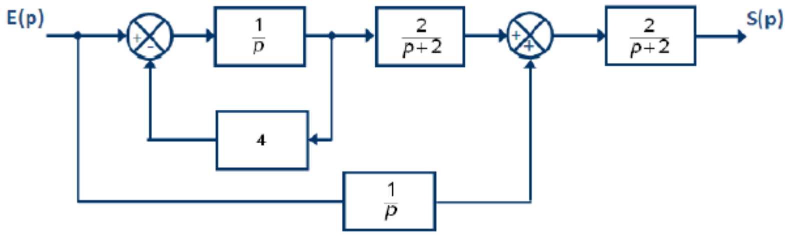
Pour ce type de système, il faut toujours commencer par déplacer les points de prélèvement pour se ramener à un système de boucles concentriques.



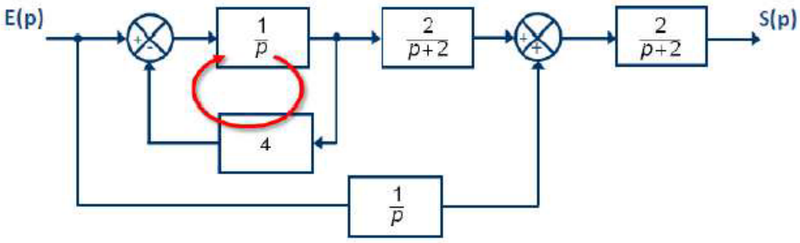
On se retrouve ensuite devant un système à boucles concentriques que l'on sait aussi bien gérer.

Application

On cherche à déterminer la FT du système représenté par le schéma bloc suivant :

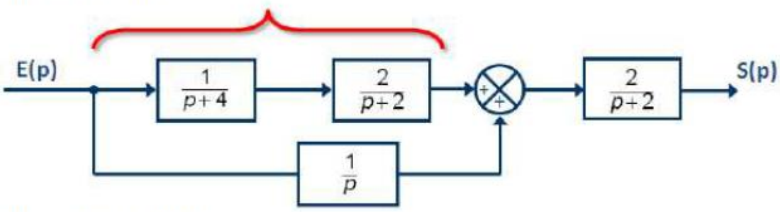


Boucle fermée :



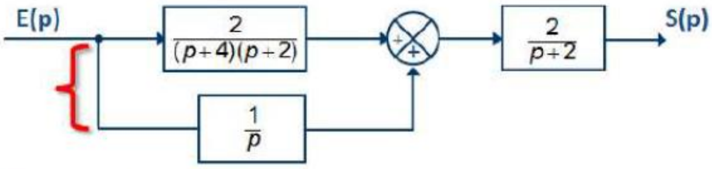
$$H_1(p) = \frac{\frac{1}{p}}{1+\frac{1}{p}\cdot 4} = \frac{1}{p+4}$$

Blocs en série :



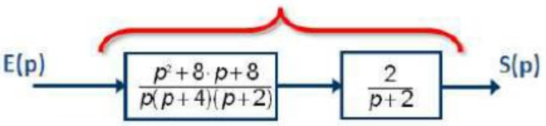
$$H_2(p) = \frac{1}{p+4} \times \frac{2}{p+2} = \frac{2}{(p+4)(p+2)}$$

Blocs en parallèle :



$$H_3(p) = \frac{2}{(p+4)(p+2)} + \frac{1}{p} = \frac{p^2+8\cdot p+8}{p(p+4)(p+2)}$$

Blocs en série :

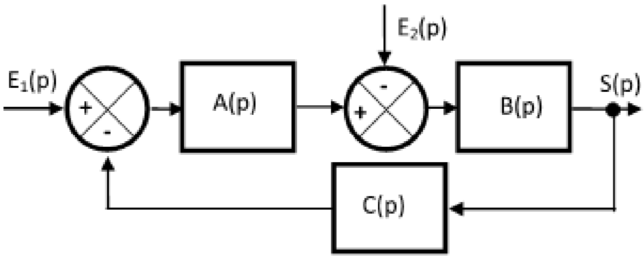


$$H(p) = \frac{p^2+8\cdot p+8}{p(p+4)(p+2)} \times \frac{2}{(p+2)} = \boxed{\frac{2(p^2+8\cdot p+8)}{p(p+4)(p+2)^2}}$$

Idéalement, il faudrait ensuite écrire cette fonction de transfert sous sa forme canonique !

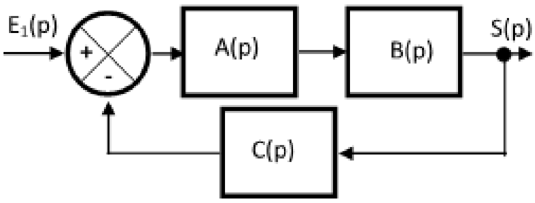
6.3. Systèmes bouclés multi-variables (principe de superposition)

Dans un système réel, **plusieurs entrées** peuvent venir modifier la sortie. Ces entrées comprennent non seulement l'entrée principale mais aussi des entrées supplémentaires très souvent parasites = **perturbations** (bruit, effort résistant…).



Pour déterminer la FT sur ce type de système, on utilise le **principe de superposition des SLCI.** On superpose 2 modes : un 1[er] pour lequel l'entrée $E_2(p)$ est considérée comme nulle et un 2[nd] mode pour lequel l'entrée $E_1(p)$ est considérée comme nulle.

- Mode à entrée $E_2(p)=0$

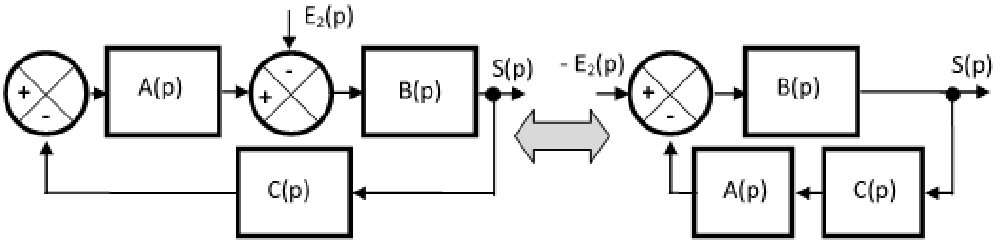


$$H_1(p)\big|_{E_2(p)=0} = \left.\frac{S(p)}{E_1(p)}\right|_{E_2(p)=0}$$

$$H_1(p)\big|_{E_2(p)=0} = \frac{A(p).B(p)}{1+A(p).B(p).C(p)}$$

$H_1(p)$ est la fonction de transfert en poursuite.

- Mode à entrée $E_1(p)=0$



$$H_2(p)\big|_{E_1(p)=0} = \left.\frac{S(p)}{-E_2(p)}\right|_{E_1(p)=0} = \frac{B(p)}{1+A(p).B(p).C(p)}$$

$H_2(p)$ est la fonction de transfert en régulation.

La superposition des 2 modes permet d'obtenir la FT du système multi-variables :

$$\boxed{S(p) = H_1(p)\big|_{E_2(p)=0}.E_1(p) - H_2(p)\big|_{E_1(p)=0}.E_2(p) = \frac{A(p).B(p)}{1+A(p).B(p).C(p)}.E_1(p) - \frac{B(p)}{1+A(p).B(p).C(p)}.E_2(p)}$$

Nota : les 2 dénominateurs sont les mêmes, c'est une caractéristique de la boucle.